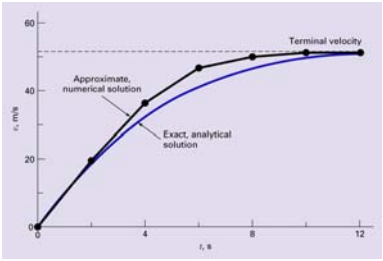
Chap. 4 오차 (Errors)

- ❖ 오차의 정의
- ❖ 반올림오차
- ❖ 절단오차
- ❖ 수치미분

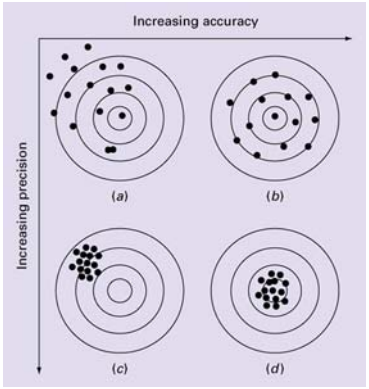


오차 (Error)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ **정확도와 정밀도**

- 정확도 (Accuracy):
- 정밀도 (Precision):
- 부정확성 (Inaccuracy, 편심):
- 비정밀도 (Imprecision, 불확실성):
- Ex) p. 104 그림 4-1 (a) 부정확과 비정밀
  (b) 정확과 비정밀
  (c) 부정확과 정밀
  (d) 정확과 정밀



오차 (Error)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 오차의 정의

- 절대오차 (absolute error) : (A: 참값, a: 근사값)
- 상대오차 (relative error) :
- 백분율 상대오차 (percent relative error) :
- Ex) 다리와 못의 길이 측정
  - ➲ 다리: 참값 10000 cm, 측정값 9999 cm ➔
  - ➲ 못 : 참값 10 cm, 측정값 9 cm ➔ %

❑ 수치해석(반복계산)에서의 상대오차

- 실제 상황에서 참값을 알고 있는지? ➔ 참값을 가장 잘 나타내는 근사값 사용
- 반복계산에서의 상대오차:
- Ex) Exponential 함수의 Maclaurin 급수전개:

Ex) 예제 4.1 (pp. 116)

오차의 종류

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 반올림오차 (Round-off error)

- 디지털 컴퓨터가 어떤 수량을 완전하게 표현할 수 없기 때문에 발생
- 계산의 각 단계에서 유효숫자를 처리해가는 과정에서 발생
- Ex) C 언어에서의 부동소수점 처리
  - ➲ float 형 (4 byte) :
  - ➲ double 형 (8 byte) :

❑ 절단오차 (Truncation error)

- 실제 계산식을 근사식으로
  묘사할 때 발생되는 오차
- 무한급수 혹은 극한조작으로 계산되는 경우에 발생 예) Taylor series

반올림오차 (Round-off error)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 유효숫자

5/3을 소수 5자리에서 반올림하면 : 1.6667

- 반올림해서 1.6667이 되는 수 x의 범위 :
- 오차 :
- Cf) Data 처리시 유효숫자의 중요성: A = 0.25, a = 0.24 일 때 오차 0.01

  (소수점 2자리에서 반올림) A = 0.3, a = 0.2 일 때 오차: 0.1

❑ 컴퓨터(32비트)에서의 유효숫자 표현

- 정수: -2,147,483,648 ~ 2,147,483,647 ($-2^{31} \sim 2^{31}$)
- 소수: $10^{-308} \sim 10^{308}$ (16 bit: $10^{-39} \sim 10^{39}$) cf) realmin & realmax
- 기계입실론 (Machine epsilon) : 가장 미세한 숫자 (유효숫자 16자리) cf) eps

반올림오차

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 산술적 연산에 의한 오차

- 연산시 유효숫자의 변경에 의해 발생되는 오차 (예: 유효숫자 4개)

  ➲ $1.557 + 0.04341 = 0.1557 \times 10^1 + 0.004341 \times 10^1 = 0.160041 \times 10^1 = 0.1600 \times 10^1$
- 비슷한 두 수간의 뺄셈 수행시 유효숫자 감소

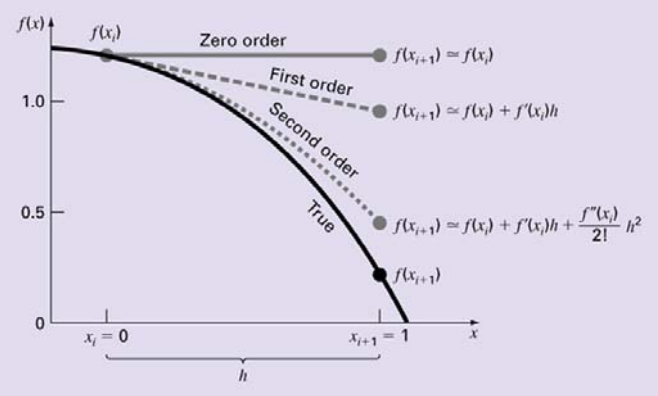
  ➲ 0.12345 – 0.12343 = 0.00002
- Ex) A = 222.88, a = 222.11 E_t = 222.88 – 222.11 = 0.77

  위 수치를 유효숫자 4자리로 절단하여 E를 구해보면

절단오차 (Truncation Errors)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Taylor Theorem: Any smooth function can be approximated as a polynomial.



Taylor Series

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

- **First order Taylor approximation of *f(x)* :**

$$\text{where} \quad f'(x_{i+1}) \cong \frac{f_f(x_i) - f_b(x_i)}{\Delta x}$$

- **Second order Taylor approximation of *f(x)* :**

$$\text{where} \quad f''(x_{i+1}) \cong \frac{f_f'(x_{i+1}) - f_b'(x_i)}{\Delta x}$$

- **n-th order Taylor approximation of *f(x)* :**

$$\text{where} \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad \text{for} \quad x_i \le \xi \le x_{i+1}$$

Taylor Series에서의 절단오차

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 번지점프 속도 계산: 1st order approximation

$$\text{truncation error}$$

$$\frac{R_1}{t_{i+1}-t_i} = \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\frac{v''(\xi)}{2!}(t_{i+1}-t_i)^2$$

$$= \frac{v''(\xi)}{2!}(t_{i+1}-t_i)$$

$$= O(h)$$

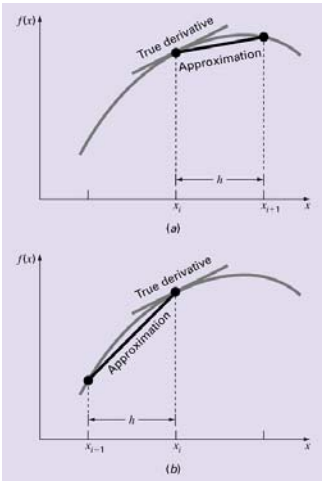
Ex) 예제 4.3 Taylor 급수전개 (pp. 121)

수치미분 (Numerical Differentiation)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 유한차분(Finite Difference)에 의한 수치미분

- 전향차분 (forward difference)
- 후향차분 (backward difference)

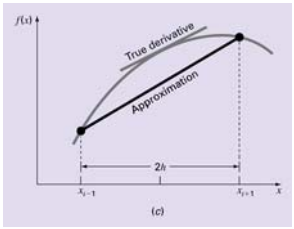


수치미분 (Numerical Differentiation)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 유한차분(Finite Difference)에 의한 수치미분

- 중심차분 (central difference)



Ex) 예제 4.4 도함수의 유한제차분 근사 (pp. 127 ~ 128)

전체 수치오차의 고찰

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ Step size(h)를 줄이면?

- Taylor Series의 계산이 정확해짐에 따라 절단오차 감소됨
- 반복계산 회수가 증가됨에 따라 반올림오차의 누적량이 많아짐