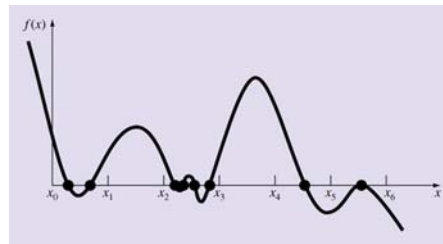


Chap. 5 비선형 방정식의 해법 (1) - 구간법

- ❖ 비선형 방정식의 개요
- ❖ 증분탐색법
- ❖ 이분법
- ❖ 가위치법



비선형 방정식 (Nonlinear Equation)

□ 선형 방정식: $Ax = b$

- 해석적인 방법으로 방정식을 만족하는 해의 계산이 용이함
- 한번의 계산으로 해를 구할 수 있음 → $x = A^{-1}b$ (Direct calculation)
- Example: 하중을 받는 부재의 탄성 변형

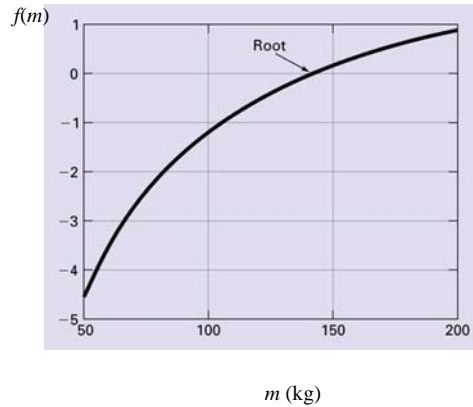
□ 비선형 방정식

- 특수한 경우(예. 2차함수)를 제외하고는 해석적인 방법으로 해를 구하기 어려움
- 초기치 근사 및 반복계산에 의해 실제 해에 근접한 근사해를 얻어야 함 → 계산시간 증대
- 해의 수렴성(convergence)이 항상 보장되지는 않음
- Example: 기하학적 비선형성, 재료의 비선형성, 경계조건의 비선형성 등
- 고정점 반복법, 2분법, Newton-Raphson 반복법, Secant법 등

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right)$$

Q: 자유낙하 4초 후에 36 m/s를 초과하지 않는 임계 질량? (단 항력계수는 0.25 kg/m)



□ 구간법 (Braketing Methods)

- 정해진 폐구간 $[a, b]$ 사이에서 해를 찾는 방법
- 구간의 양끝을 나타내는 2개의 초기 가정값 사용
- 수렴성 보장되나 수렴속도 늦음
- Ex) 증분탐색법, 이분법, 가위치법 등

□ 개방법 (Open Methods)

- 특정한 구간 없이 한 개의 초기값에서 시작하여 해를 찾는 방법
- 수렴성이 항상 보장되지는 않음
- 수렴속도는 구간법에 비하여 빠름
- Ex) 고정점 반복법, Newton-Raphson법, 할선법 등

□ 초기 근사치의 설정 방법

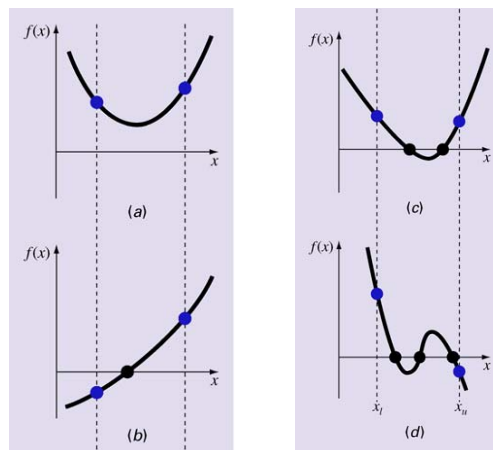
정리 1 변수 x 의 함수 $f(x)$ 가 $a \leq x \leq b$ 에서 연속이고 $f(a), f(b)$ 가 모두 0이 아니고, 부호가 다를 때, $f(x)=0$ 의 근은 구간 $[a, b]$ 사이에 적어도 하나 있다.

【예제 1】 $4x^3 - 2x - 1 = 0$ 의 근의 대략의 값을 정하여라.

풀이 $f(x) = 4x^3 - 2x - 1$ 이라 하고, 도함수 $f'(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 를 써서 $f(x)$ 의 그래프를 그려 보면, $f(0.5) \cdot f(1) < 0$ 이므로 $4x^3 - 2x - 1 = 0$ 의 근은 구간 $(0.5, 1)$ 에 하나 있다. 다시 구간 $(0.5, 1)$ 을 세분하면 $(0.8, 0.9)$ 사이에 근이 있다.

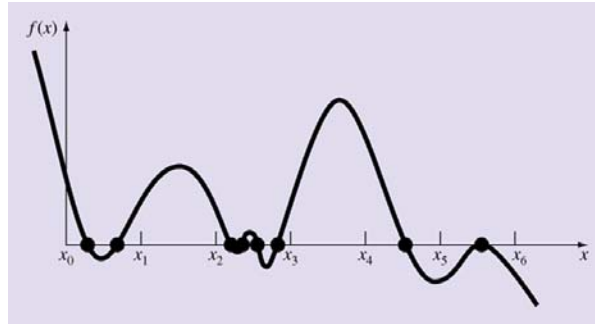
x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	-1.500	-1.336	-1.018	-0.552	0.116	1.000

구간법에서의 해의 개수



□ 증분탐색법 (Incremental Searching Method)

- 구간 내부를 일정한 증분으로 분할하여 함수의 부호가 바뀌는 부분 탐색
- 증분의 구간 길이 선택에 따라 결과에 차이 발생



증분탐색법 – M File

```
function xb = incsearch(func,xmin,xmax,ns)
% xb = incsearch(func,xmin,xmax,ns):
% finds brackets of x that contain sign changes of
% a function on an interval
% input:
% func = name of function
% xmin, xmax = endpoints of interval
% ns = (optional) number of subintervals along x
% used to search for brackets
% output:
% xb(k,1) is the lower bound of the kth sign change
% xb(k,2) is the upper bound of the kth sign change
% If no brackets found, xb = [].

if nargin < 4, ns = 50; end %if ns blank set to 50

% Incremental search
x = linspace(xmin,xmax,ns);
```

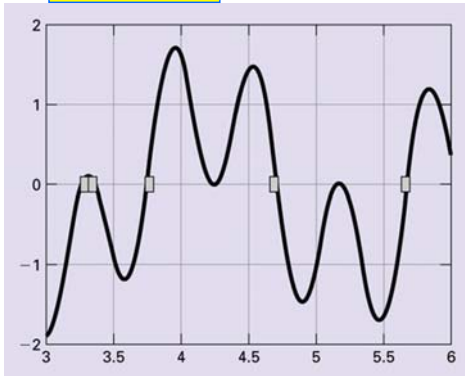
```
f = func(x);
nb = 0; xb = []; %xb is null unless sign change detected
for k = 1:length(x)-1
    if sign(f(k)) ~= sign(f(k+1)) %check for sign change
        nb = nb + 1;
        xb(nb,1) = x(k);
        xb(nb,2) = x(k+1);
    end
end

if isempty(xb) %no brackets were found
    disp('no brackets found')
    disp('check interval or increase ns')
else
    disp('number of brackets:') %number of brackets
    disp(nb)
end
```

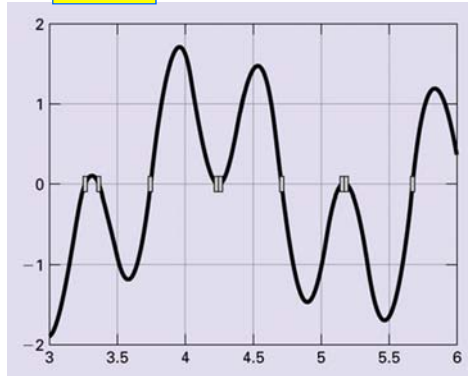
$$f(x) = \sin(10x) + \cos(3x), [3, 6]$$

p. 143 예제 5.2

Default: ns = 50



ns = 100



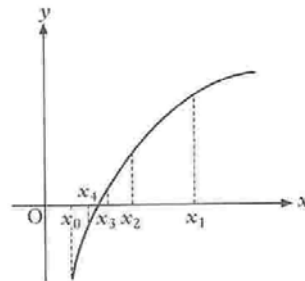
2분법 (Bisection Method)

방정식 $f(x) = 0 \rightarrow x_l \leq x \leq x_u$ 에서 $f(x)$ 가 연속이고, $f(x_l)f(x_u) < 0$ 일 때 해는 x_l 과 x_u 사이에 존재

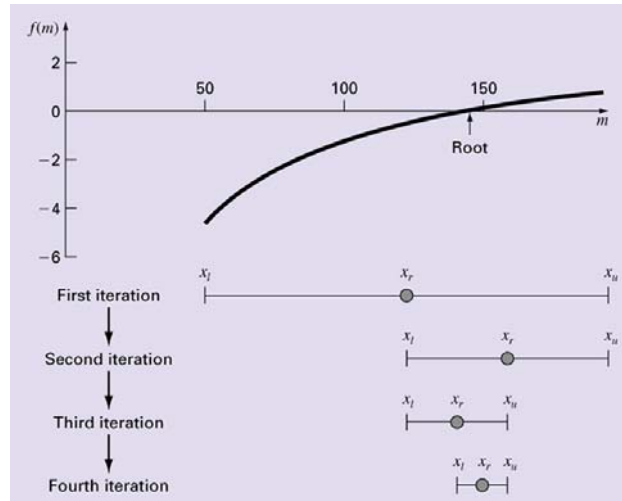
초기근사치 :

제 1 근사해

제 2 근사해



2분법 (Bisection Method)



2분법에서의 오차 및 반복횟수

$I_0 = [x_0, x_1]$ 이라 하고, 차례로 축소되는 구간을 I_1, I_2, \dots 이라 할 때, n 번째의 구간 I_n 을 $[x_n, x_{n+1}]$ 이라하면 $\alpha \in I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_0$ 이고

$$|x_{n+1} - x_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (x_1 - x_0)$$

이므로

$$|e_n| = |x_n - \alpha| \leq |x_{n+1} - x_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (x_1 - x_0)$$

오차가 ε 이내가 되기 위한 반복횟수 n (α 가 미지이므로 e_n 도 미지이다)을 구하려면

$$|x_{n+1} - x_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (x_1 - x_0) \leq \varepsilon$$

을 만족하는 n 을 구하면 된다.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{x_1 - x_0} \text{에서 } 2^n \geq \frac{x_1 - x_0}{\varepsilon}$$

이므로

2분법 - Example

[예제 1] $f(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$ 의 근을 2분법으로 구하고, 오차가 $\varepsilon \leq 10^{-5}$ 이 되는 반복계산횟수 n 을 구하라(단, $x_0 = 2, x_1 = 4$ 로 하라).

반복해 나가면

$$x_5 = 2.875, \quad x_6 = 2.9375, \quad x_7 = 2.96875, \quad x_8 = 2.953125 \\ x_9 = 2.9453125, \quad x_{10} = 2.943354, \quad x_{11} = 2.9433594, \dots$$

$\varepsilon = 10^{-5}$ 이라면

$$n \geq \log_2 \frac{4-2}{10^{-5}} = \frac{\log 2 - (-5)}{\log 2} = \frac{5.3010}{0.3010} = 17.6$$

따라서 18회 반복하여야 한다.

2분법 - 알고리즘

Algorithm Bisection

1. Input $\{x_0, x_1, \varepsilon\}$
2. $f_0 = f(x_0)$ and $f_1 = f(x_1)$
3. If $f_0 \cdot f_1 > 0$ Then Stop
4. $x_2 = 0.5(x_0 + x_1), f_2 = f(x_2)$
5. If $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$ Then go to 6
Else
- 5.1 If $f_0 \cdot f_2 < 0$
Then
 $x_1 = x_2$ and $f_1 = f_2$
Else
 $x_0 = x_2$ and $f_0 = f_2$
- 5.2 go to 4
6. Output $\{x_2\}$ and Stop

Ex) p. 145 예제 5.3

$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} t\right) - v(t)$$

```
function [root, ea, iter] = bisection(func,xl,xu,es,maxit)
% root = bisection(func,xl,xu,es,maxit):
% uses bisection method to find the root of a function
% input:
% func = name of function
% xl, xu = lower and upper guesses
% es = (optional) stopping criterion (%)
% maxit = (optional) maximum allowable iterations
% output:
% root = real root

if nargin<3, error('insufficient arguments'), end
test = func(xl) * func(xu);
if test>0, error('no sign change'), end

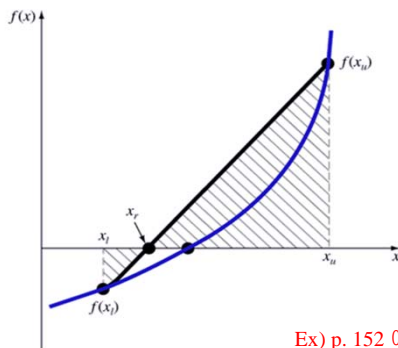
% if necessary, assign default values
if nargin<5, maxit=50; end %if maxit blank set to 50
if nargin<4, es=0.001; end %if es blank set to 0.001
```

```
% bisection
iter = 0;
xr = xl;
while (1)
    xrold = xr;
    xr = (xl + xu)/2;
    iter = iter + 1;
    if xr ~= 0, ea = abs((xr - xrold)/xr) * 100; end
    test = func(xl) * func(xu);
    if test < 0
        xu = xr;
    elseif test > 0
        xl = xr;
    else
        ea = 0;
    end
    if ea <= es | iter >= maxit, break, end
end
root = xr;
```

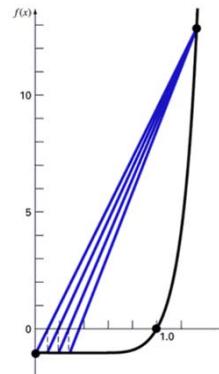
가위치법 (False Position Method)

2분법에서 새로운 x_r 값을 평균 대신 양 구간
점을 연결한 직선과 x 축간의 교점으로 계산

$$x_r = x_u - \frac{x_l - x_u}{f(x_l) - f(x_u)} f(x_u)$$



Ex) p. 152 예제 5.5~5.6



1958년부터 2003년까지 Hawaii 의 Mauna Loa에서 수집된 이산화탄소의 농도 증가 경향

$$p_{CO_2} = 0.011825(t - 1980.5)^2 + 1.356975(t - 1980.5) + 339 \quad (\text{unit : ppm})$$

상기 이산화탄소의 농도증가가 빗물의 산성도에 미치는 영향

$$pH = -\log_{10}[H^+] \quad (\text{where } [H^+] : \text{수소이온의 몰농도})$$

$[H^+]$: 를 구하기 위한 비선형방정식 (식 5.17)

$$0 = \frac{K_1}{10^6[H^+]} K_H p_{CO_2} + 2 \frac{K_2 K_1}{10^6[H^+]^2} K_H p_{CO_2} + \frac{K_w}{[H^+]} - [H^+]$$

CO₂ 농도 (19% 증가)

✓ 1958년 : 315

✓ 2003년 : 376

Where $K_1 = 10^{-6.3}$, $K_2 = 10^{-10.3}$, $K_H = 10^{-1.46}$, $K_w = 10^{-14}$

청결한 지역의 빗물의 pH는 항상 2 ~ 12 사이의 범위임