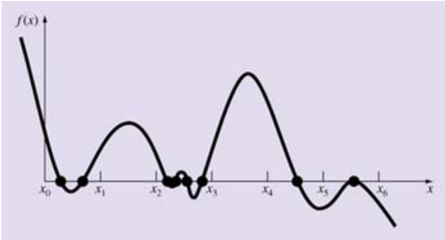
Chap. 5 비선형 방정식의 해법 (1) – 구간법

- 비선형 방정식의 개요
- 증분탐색법
- 이분법
- 가위치법



비선형 방정식 (Nonlinear Equation)

❑ 선형 방정식: Ax = b

- 해석적인 방법으로 방정식을 만족하는 해의 계산이 용이함
- 한번의 계산으로 해를 구할 수 있음 → $x = A^{-1}b$ (Direct calculation)
- Example: 하중을 받는 부재의 탄성 변형

❑ 비선형 방정식

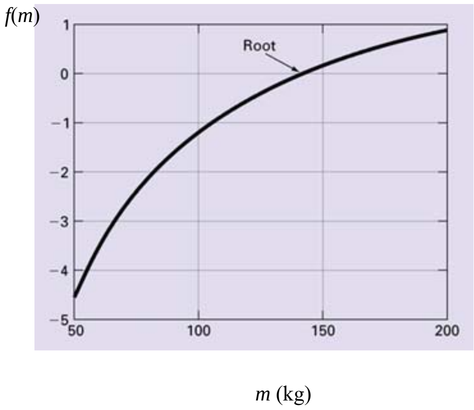
- 특수한 경우(예. 2차함수)를 제외하고는 해석적인 방법으로 해를 구하기 어려움
- 초기치 근사 및 반복계산에 의해 실제 해에 근접한 근사해를 얻어야 함 → 계산시간 증대
- 해의 수렴성(convergence)이 항상 보장되지는 않음
- Example: 기하학적 비선형성, 재료의 비선형성, 경계조건의 비선형성 등
- 고정점 반복법, 2분법, Newton-Raphson 반복법, Secant법 등

그래프를 사용한 비선형방정식 해법

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}\,t\right)$$

Q: 자유낙하 4초 후에 36 m/s를 초과하지 않는 임계 질량? (단 항력계수는 0.25 kg/m)



구간법과 개방법

서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ **구간법 (Braketing Methods)**

- 정해진 폐구간 [a, b] 사이에서 해를 찾는 방법
- 구간의 양끝을 나타내는 2개의 초기 가정값 사용
- 수렴성 보장되나 수렴속도 늦음
- Ex) 증분탐색법, 이분법, 가위치법 등

❑ **개방법 (Open Methods)**

- 특정한 구간 없이 한 개의 초기값에서 시작하여 해를 찾는 방법
- 수렴성이 항상 보장되지는 않음
- 수렴속도는 구간법에 비하여 빠름
- Ex) 고정점 반복법, Newton-Raphson법, 할선법 등

초기 근사치 (Initial Guess)

❑ 초기 근사치의 설정 방법

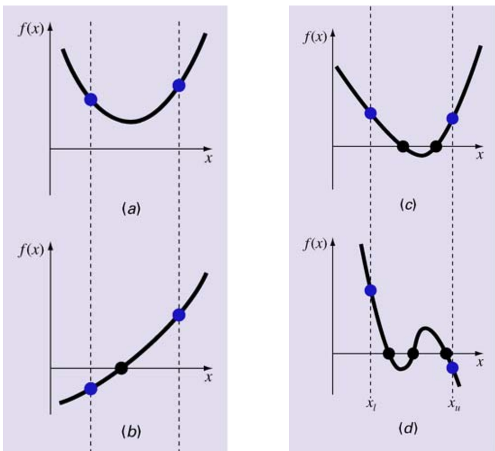
정리 1 변수 x의 함수 $f(x)$가 $a \le x \le b$에서 연속이고 $f(a)$, $f(b)$가 모두 0이 아니고, 부호가 다를 때, $f(x)=0$의 근은 구간 $[a, b]$ 사이에 적어도 하나 있다.

【예제 1】 $4x^3-2x-1=0$의 근의 대략의 값을 정하여라.

풀이 $f(x)=4x^3-2x-1$이라 하고, 도함수 $f'(x)=12x^2-2=12\left(x+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$를 써서 $f(x)$의 그래프를 그려 보면, $f(0.5)\cdot f(1)<0$이므로 $4x^3-2x-1=0$의 근은 구간 $(0.5, 1)$에 하나 있다. 다시 구간 $(0.5, 1)$을 세분하면 $(0.8, 0.9)$ 사이에 근이 있다.

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	−1.500	−1.336	−1.018	−0.552	0.116	1.000

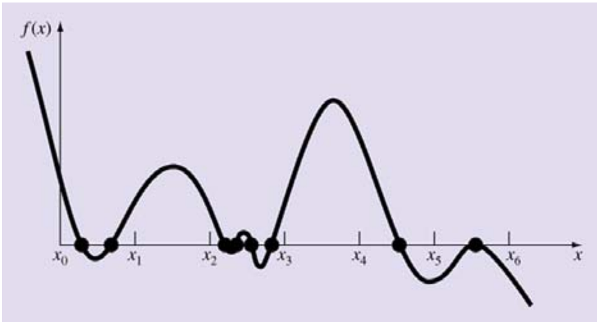
구간법에서의 해의 개수



증분탐색법

❑ 증분탐색법 (Incremental Searching Method)

- 구간 내부를 일정한 증분으로 분할하여 함수의 부호가 바뀌는 부분 탐색
- 증분의 구간 길이 선택에 따라 결과에 차이 발생



증분탐색법 – M File

```
function xb = incsearch(func,xmin,xmax,ns)
% xb = incsearch(func,xmin,xmax,ns):
%   finds brackets of x that contain sign changes of
%   a function on an interval
% input:
%   func = name of function
%   xmin, xmax = endpoints of interval
%   ns = (optional) number of subintervals along x
%        used to search for brackets
% output:
%   xb(k,1) is the lower bound of the kth sign change
%   xb(k,2) is the upper bound of the kth sign change
%   If no brackets found, xb = [].

if nargin < 4, ns = 50; end %if ns blank set to 50

% Incremental search
x = linspace(xmin,xmax,ns);
```

```
f = func(x);
nb = 0; xb = []; %xb is null unless sign change detected
for k = 1:length(x)-1
  if sign(f(k)) ~= sign(f(k+1)) %check for sign change
    nb = nb + 1;
    xb(nb,1) = x(k);
    xb(nb,2) = x(k+1);
  end
end

if isempty(xb)    %no brackets were found
  disp('no brackets found')
  disp('check interval or increase ns')
else
  disp('number of brackets:') %number of brackets
  disp(nb)
end
```

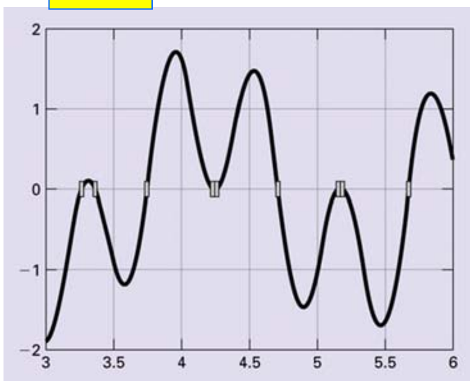
증분탐색법

$f(x) = sin(10x) + cos(3x),\ \ [3, 6]$

p. 148 예제 5.2

Default: ns = 50

ns = 100



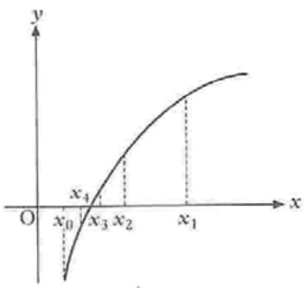
2분법 (Bisection Method)

방정식 $f(x)=0$ ➔ $x_l \le x \le x_u$ 에서 $f(x)$가 연속이고, $f(x_l)\,f(x_u)<0$ 일 때 해는 x_l과 x_u 사이에 존재

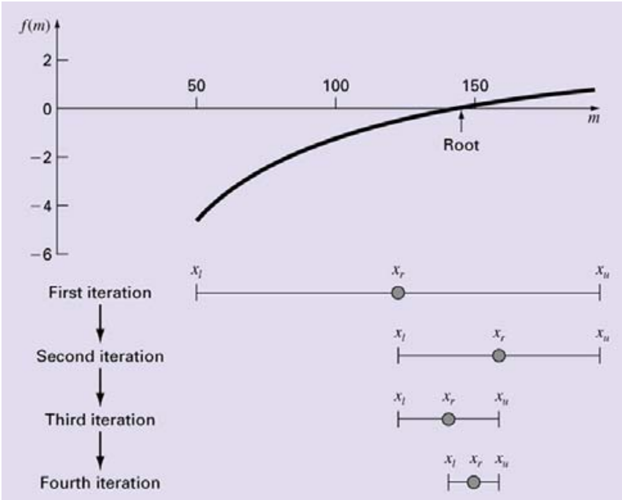
초기근사치 :

제 1 근사해

제 2 근사해



2분법 (Bisection Method)



2분법에서의 오차 및 반복횟수

$I_0=[x_0,\ x_1]$이라 하고, 차례로 축소되는 구간을 $I_1,\ I_2,\ \cdots$이라 할 때, n번째의 구간 I_n을 $[x_n,\ x_{n+1}]$이라면 $\alpha\in I_n\subset I_{n-1}\subset\cdots\subset I_0$이고

$$|x_{n+1}-x_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)$$

이므로

$$|e_n|=|x_n-\alpha|\le|x_{n+1}-x_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)$$

오차가 ε이내가 되기 위한 반복횟수 n(α가 미지이므로 e_n도 미지이다)을 구하려면

$$|x_{n+1}-x_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)\le\varepsilon$$

을 만족하는 n을 구하면 된다.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\le\frac{\varepsilon}{x_1-x_0} \text{에서} \quad 2^n\ge\frac{x_1-x_0}{\varepsilon}$$

이므로

2분법 – Example

【예제 1】 $f(x)=x^3-9x+1=0$의 근을 2분법으로 구하고, 오차가 $\varepsilon \le 10^{-5}$이 되는 반복계산횟수 n을 구하라(단, $x_0=2$, $x_1=4$로 하라).

반복해 나가면

$$x_5=2.875,\quad x_6=2.9375,\quad x_7=2.96875,\quad x_8=2.953125$$
$$x_9=2.9453125,\quad x_{10}=2.943354,\quad x_{11}=2.9433594,\ \cdots$$

$\varepsilon=10^{-5}$이라면

$$n \ge \log_2 \frac{4-2}{10^{-5}} = \frac{\log 2-(-5)}{\log 2} = \frac{5.3010}{0.3010} = 17.6$$

따라서 18회 반복하여야 한다.

2분법 – 알고리즘

Algorithm Bisection

1. Input $\{x_0, x_1, \varepsilon\}$
2. $f_0=f(x_0)$ and $f_1=f(x_1)$
3. If $f_0 \cdot f_1>0$ Then Stop
4. $x_2=0.5(x_0+x_1)$, $f_2=f(x_2)$
5. If $|x_1-x_0| \le \varepsilon$ Then go to 6
   Else
   5.1 If $f_0 \cdot f_2<0$
       Then
       $x_1=x_2$ and $f_1=f_2$
       Else
       $x_0=x_2$ and $f_0=f_2$
   5.2 go to 4
6. Output $\{x_2\}$ and Stop

Ex) p. 151 예제 5.3

$$f(m)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}\,t\right)-v(t)$$

이분법 – M File

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

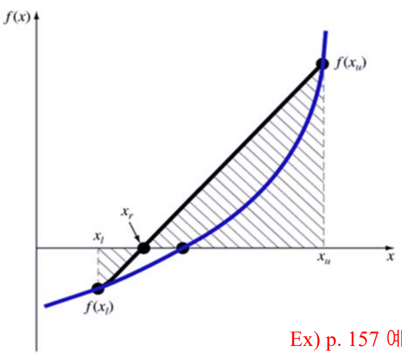
```
function [root, ea, iter] = bisection(func,xl,xu,es,maxit)
% root = bisection(func,xl,xu,es,maxit):
%   uses bisection method to find the root of a function
% input:
%   func = name of function
%   xl, xu = lower and upper guesses
%   es = (optional) stopping criterion (%)
%   maxit = (optional) maximum allowable iterations
% output:
%   root = real root

if nargin<3, error(‘insufficient arguments’), end
test = func(xl) * func(xu);
if test>0, error(‘no sign change’), end

% if necessary, assign default values
if nargin<5, maxit=50; end     %if maxit blank set to 50
if nargin<4, es=0.001; end     %if es blank set to 0.001
```

```
% bisection
iter = 0;
xr = xl;
while (1)
  xrold = xr;
  xr = (xl + xu)/2;
  iter = iter + 1;
  if xr ~= 0, ea = abs((xr - xrold)/xr) * 100; end
  test = func(xl) * func(xr);
  if test < 0
    xu = xr;
  elseif test > 0
    xl = xr;
  else
    ea = 0;
  end
  if ea <= es | iter >= maxit, break, end
end
root = xr;
```

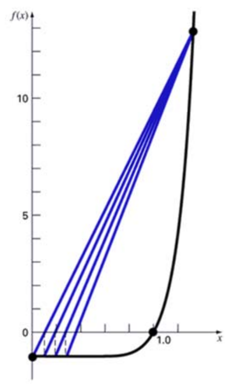

가위치법 (False Position Method)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

2분법에서 새로운 x_r값을 평균 대신 양 구간 점을 연결한 직선과 x축간의 교점으로 계산



Ex) p. 157 예제 5.5~5.6



[사례연구] 온실가스와 빗물 (p. 159 ~ 163)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

1958년부터 2003년까지 Hawaii 의 Mauna Loa에서 수집된 이산화탄소의 농도 증가 경향

$$p_{CO_2} = 0.011825(t-1980.5)^2 + 1.356975(t-1980.5) + 339 \qquad (unit: ppm)$$

상기 이산화탄소의 농도증가가 빗물의 산성도에 미치는 영향

$$pH = -\log_{10}[H^+] \qquad \text{(where } [H^+] \text{ : 수소이온의 몰농도)}$$

$[H^+]$: 를 구하기 위한 비선형방정식 (식 5.17)

$$0 = \frac{K_1}{10^6[H^+]}K_H p_{CO_2} + 2\frac{K_2K_1}{10^6[H^+]^2}K_H p_{CO_2} + \frac{K_w}{[H^+]} - [H^+]$$

Where $K_1 = 10^{-6.3}$, $K_2 = 10^{-10.3}$, $K_H = 10^{-1.46}$, $K_w = 10^{-14}$

청결한 지역의 빗물의 pH는 항상 2 ~ 12 사이의 범위임

☞ CO_2 농도 (19% 증가)
- ✓ 1958년 : 315
- ✓ 2003년 : 376