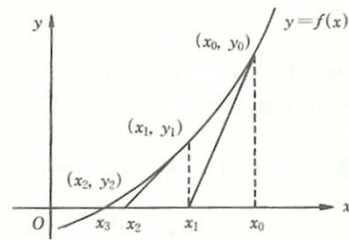


Chap. 6 비선형 방정식의 해법 (2) - 개방법

- ❖ 고정점 반복법
- ❖ Newton-Raphson법
- ❖ 할선법
- ❖ Matlab의 내장함수



[Review] 구간법과 개방법

□ 구간법 (Bracketing Methods)

- 정해진 폐구간 $[a, b]$ 사이에서 해를 찾는 방법
- 구간의 양끝을 나타내는 2개의 초기 가정값 사용
- 수렴성 보장되나 수렴속도 늦음
- Ex) 증분탐색법, 이분법, 가위치법 등

□ 개방법 (Open Methods)

- 특정한 구간 없이 한 개의 초기값에서 시작하여 해를 찾는 방법
- 수렴성이 항상 보장되지는 않음
- 수렴속도는 구간법에 비하여 빠름
- Ex) 고정점 반복법, Newton-Raphson법, 할선법 등

고정점 반복법 (Fixed-Point Method)

[정리 2] $g(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능하면, 평균값의 정리

$$g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a) \quad (a < \xi < b)$$

가 성립한다. 반복함수 $x = g(x)$ 에서 근의 초기값을 x_0 이라 하고

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

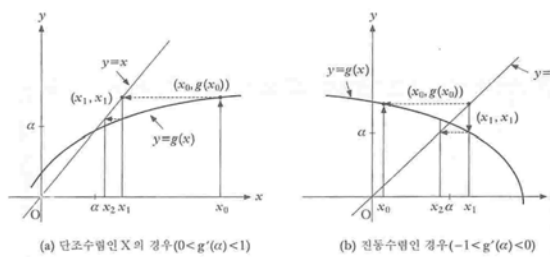
.....

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

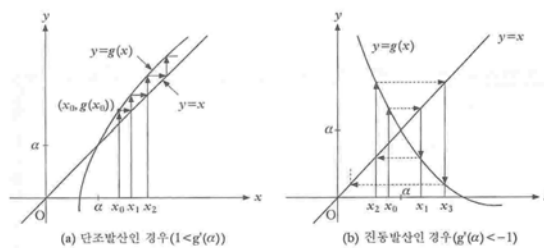
이라 할 때, $|g'(x)| < 1$ 이면 $\{x_n\}$ 은 수렴한다.

수렴(Convergence)과 발산(Divergence)

수렴의 경우



발산의 경우



고정점 반복법 – Example

방정식 $f(x) = x^2 - x - 2 = 0, \quad 1 \leq x \leq 4$
 $x_0 = 3$ 이고 다음 반복식을 사용할 때 수렴성 판단

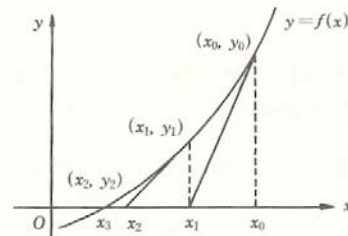
Ex) p. 165 예제 6.1

Newton Raphson Method

비선형 방정식 $f(x) = 0$ 의 해($y = f(x)$ 의 그래프에서 $y = 0$ 를 만족하는 x 값)를 구하기 위해

- ① 초기값 (x_0)에서 접선을 그어 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표를 x_1 라 하고,
- ② 이 점에서 y 축과 평행으로 선분을 그어 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 교점을 (x_1, y_1)
- ③ 에서 다시 접선을 그어 x 축과 만나는 점의 좌표 x_2 를 구한다.

(x_n 이 수렴할때까지 2, 3 과정 반복)



Newton Raphson 법 – Example (1)

【예제 2】 $3x^3 - 2x - 1 = 0$ 의 근의 초기값을 $x_0 = 2$ 로 하여 Newton-Raphson의 방법으로 풀어라.

【해】 $f(x) = 3x^3 - 2x - 1$ 이라면 $f'(x) = 9x^2 - 2$, $x_0 = 2$ 이므로

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n^3 - 2x_n - 1}{9x_n^2 - 2}$$

$$x_1 = 2 - \frac{3 \times 8 - 2 \times 2 - 1}{9 \times 4 - 2} = 1.44$$

$$x_2 = 1.44 - \frac{3 \times 1.44^3 - 2 \times 1.44 - 1}{9 \times 1.44^2 - 2} = 1.44 - \frac{5.08}{16.7} = 1.14$$

$$x_3 = 1.14 - \frac{3 \times 1.14^3 - 2 \times 1.14 - 1}{9 \times 1.14^2 - 2} = 1.14 - \frac{1.16}{9.69} = 1.02$$

$$x_4 = 1.02 - \frac{3 \times 1.02^3 - 2 \times 1.02 - 1}{9 \times 1.02^2 - 2} = 1.02 - \frac{0.14}{7.36} = 1.00$$

$$x_5 = 1.00 - \frac{3 \times 1.00^3 - 2 \times 1.00 - 1}{9 \times 1.00^2 - 2} = 1.00 - \frac{0.00}{7.00} = 1.00$$

이 되어 계속 계산해도 같은 결과이다. 사실상 $f(1) = 0$ 이므로 구하는 근은 $x = 1$ 이다.

구하는 근의 근사값의 오차를 ϵ 이하로 한다면, $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon$ 일 때 x_{n+1} 을 근사근으로 취하고, 또한 $|f(x_{n+1})| \approx 0$ 일 때 x_{n+1} 을 근사근으로 취한다.

Newton Raphson 법에서의 해의 수렴성

정리 1 $f(x)$ 가 유한폐구간 $[a, b]$ 에서 두 번 연속 미분가능하고, 다음 조건을 만족한다 하자.

- (i) $f(a)f(b) < 0$
- (ii) $f'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$
- (iii) 모든 $x \in [a, b]$ 에 대하여 $f''(x) \geq 0$ 이거나, $f''(x) \leq 0$ 이다.
- (iv) 구간의 끝점 a, b 에서

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \text{ 이고, } \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$$

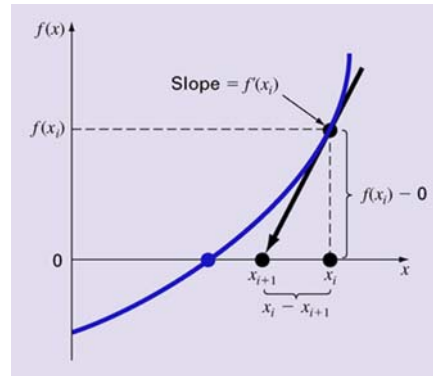
이면, Newton 법은 구간 $[a, b]$ 에서 어떠한 초기 근사근 x_0 의 선정에 대하여도 구간 내에서 $f(x) = 0$ 의 유일한 근 α 에 수렴한다.

Newton Raphson 법– Example (2)

Ex) p. 169 예제 6.2

$$f(x) = e^{-x} - x, \quad x_0 = 0$$

⇒ 4번의 반복계산에 수렴
(고정점 반복법과 비교)



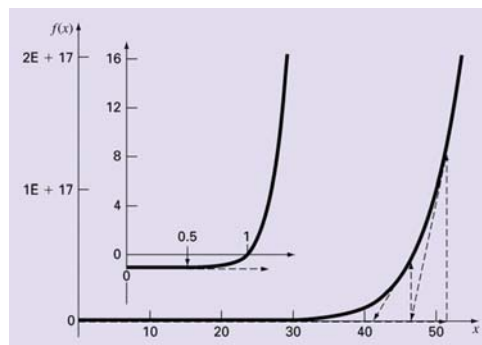
Newton Raphson 법– Example (3)

Ex) p. 170 예제 6.3

$$f(x) = x^{10} - 1, \quad x_0 = 0.5$$

$$f'(x) = 10x^9$$

⇒ 총 40번 이상의 반복계산 필요



Newton Raphson 법 – M File

```
function [root, ea, iter] = newtraph(func,dfunc,xr,es,maxit)
% root = newtraph(func,dfunc,xguess,es,maxit):
% uses Newton-Raphson method to find the root of a function

% if necessary, assign default values
if nargin<5, maxit=50; end %if maxit blank set to 50
if nargin<4, es=0.001; end %if es blank set to 0.001

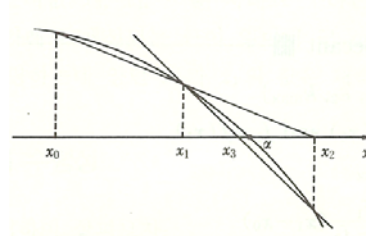
% Newton-Raphson
iter = 0;
while (1)
    xrold = xr;
    xr = xr - func(xr)/dfunc(xr);
    iter = iter + 1;
    if xr ~= 0, ea = abs((xr - xrold)/xr) * 100; end
    if ea <= es | iter >= maxit, break, end
end
root = xr;
```

Secant Method (할선법)

Newton-Raphson 방법에서 $f'(x_j)$ 을 차분으로 대체한 반복법 →

- ① 식 (1) 을 사용하여 x_2 계산
- ② $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ 을 계산하고 각각의 부호를 비교
- ③ 다음 계산에서의 구간 선정 ($n = n+1$)

(x_n 이 수렴할때까지 2, 3 과정 반복)



Secant Method- Example

보기 1 구간 $[2, 3]$ 안에 있는 $f(x) = 2x^3 - 17x^2 + 40x - 25 = 0$ 의 근을 Secant 법으로 구해보자.

$$f(2) = 3 > 0, \quad f(3) = -4 < 0$$

이므로, 구간 $[2, 3]$ 에는 반드시 근이 있다. 이들 값을 식 (1)에 대입하면

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{2(-4) - 3(3)}{-4 - 3} = 2.42857$$

다음은 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 를 써서 x_3 를 구한다.

이렇게 차례로 x_3, x_4, \dots 을 구해나가서 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (ε 은 요구되는 오차)가 되면 x_{n+1} 을 근으로 한다.

$$x_3 = 2.49485, \quad x_4 = 2.49967, \quad \dots, \quad x_7 = 2.50000$$

이 되어 $\varepsilon = 0.001$ 로 할 때, 구하는 근은 $x = 2.5$ 가 된다.

수정된 할선법

□ 수정된 할선법의 개요

- 할선법은 2개의 초기값 (x_0, x_1) 필요 (단 초기값 사이에서 부호가 변하는 것을 요구하지 않기 때문에 구간법으로 분류되지는 않음)
- 도함수를 계산하기 위해 임의의 두 값을 사용하지 않고 독립변수에 작은 변동량(δ)을 부과하여 계산
- 도함수를 계산하지 않고도 Newton-Raphson의 효율성 제공

Ex) P. 174 예제 6.5

□ Fzero 함수 (교재 p. 180 ~ 182)

- 구간법과 개방법 혼용 사용
- 개방법 (초기값 x0) : fzero('function_name', x0)
 - ↳ Ex) x = fzero(inline('x^2-9'), -4)
- 구간법 (구간 [x0, x1]) : fzero('function_name', [x0, x1])
 - ↳ Ex) x = fzero(inline('x^2-9'), [0, 4])

□ Roots 함수 (교재 p. 183 ~ 186)

- 다항식의 해 계산: $f_n(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^2 + a_nx + a_{n+1}$
- 다항식 계수로 이루어진 벡터 정의: $p = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n-1} \ a_n \ a_{n+1}]$
- 사용 형태 : roots(p)

[사례연구] 파이프 내부 유체유동 (p. 186 ~ 190)

파이프 내부를 흐르는 유체(난류)의 마찰계수 (Colebrook 방정식)

$$0 = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2.0 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

where ε (표면거칠기) = 0.0015mm = 0.0000015m, D (직경) = 0.005m

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

where ρ (밀도) = 1.23 kg/m³, V (속도) = 40 m/s,
 μ (동점성계수) = 1.79 x 10⁻⁵ N-s/m²

마찰계수 범위
: 0.008 ~ 0.08

$$g(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2.0 \log \left(\frac{0.0000015}{3.7(0.005)} + \frac{2.51}{13743\sqrt{f}} \right)$$