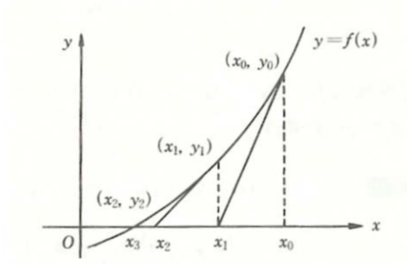
Chap. 6 비선형 방정식의 해법 (2) – 개방법

- ❖ 고정점 반복법
- ❖ Newton-Raphson법
- ❖ 할선법
- ❖ Matlab의 내장함수



[Review] 구간법과 개방법

서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ **구간법 (Braketing Methods)**

- 정해진 폐구간 [a, b] 사이에서 해를 찾는 방법
- 구간의 양끝을 나타내는 2개의 초기 가정값 사용
- 수렴성 보장되나 수렴속도 늦음
- Ex) 증분탐색법, 이분법, 가위치법 등

❑ **개방법 (Open Methods)**

- 특정한 구간 없이 한 개의 초기값에서 시작하여 해를 찾는 방법
- 수렴성이 항상 보장되지는 않음
- 수렴속도는 구간법에 비하여 빠름
- Ex) 고정점 반복법, Newton-Raphson법, 할선법 등

고정점 반복법 (Fixed-Point Method)

서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

〔정리 2〕 $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능하면, 평균값의 정리

$$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b)$$

가 성립한다. 반복함수 $x=g(x)$에서 근의 초기값을 x_0이라 하고

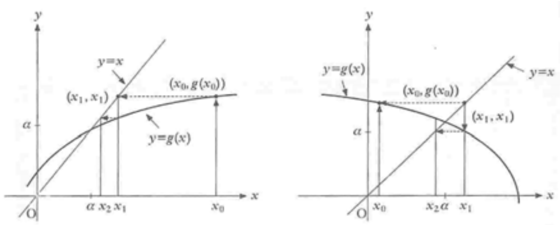
$$x_1=g(x_0)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n+1}=g(x_n)$$

이라 할 때, $|g'(x)|<1$이면 $\{x_n\}$은 수렴한다.

수렴(Convergence)과 발산(Divergence)

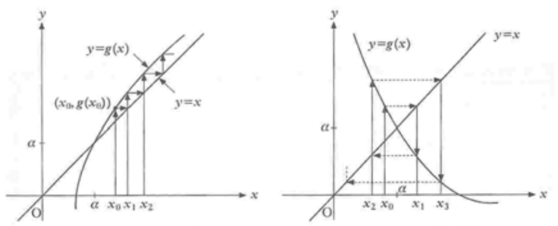
서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

수렴의 경우



(a) 단조수렴인 X의 경우$(0<g'(\alpha)<1)$ (b) 진동수렴인 경우$(-1<g'(\alpha)<0)$

발산의 경우



(a) 단조발산인 경우$(1<g'(\alpha))$ (b) 진동발산인 경우$(g'(\alpha)<-1)$

고정점 반복법 – Example

방정식 $f(x) = x^2 - x - 2 = 0, \quad 1 \le x \le 4$

$x_0 = 3$ 이고 다음 반복식을 사용할 때 수렴성 판단

Newton Raphson Method

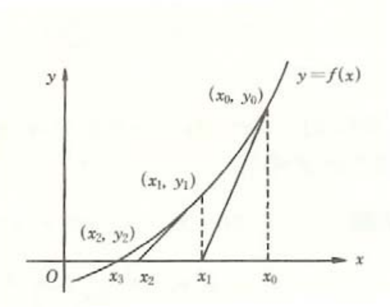
비선형 방정식 $f(x) = 0$ 의 해($y = f(x)$ 의 그래프에서 $y = 0$ 를 만족하는 x 값)를 구하기 위해

① 초기값 (x_0) 에서 접선을 그어 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표를 x_1라 하고,

② 이 점에서 y 축과 평행으로 선분을 그어 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 교점을 (x_1, y_1)

③ 에서 다시 접선을 그어 x 축과 만나는 점의 좌표 x_2를 구한다.

(x_n이 수렴할때까지 2, 3 과정 반복)



Newton Raphson 법 – Example (1)

[예제 2] $3x^{\overset{3}{2}}-2x-1=0$의 근의 초기값을 $x_0=2$로 하여 Newton-Raphson의 방법으로 풀어라.

풀이 $f(x)=3x^3-2x-1$이라면 $f'(x)=9x^2-2$, $x_0=2$이므로

$$x_{n+1}=x_n-\frac{3x_n^{\overset{3}{2}}-2x_n-1}{9x_n^2-2}$$

$$x_1=2-\frac{3\times 8-2\times 2-1}{9\times 4-2}=1.44$$

$$x_2=1.44-\frac{3\times 1.44^3-2\times 1.44-1}{9\times 1.44^2-2}=1.44-\frac{5.08}{16.7}=1.14$$

$$x_3=1.14-\frac{3\times 1.14^3-2\times 1.14-1}{9\times 1.14^2-2}=1.14-\frac{1.16}{9.69}=1.02$$

$$x_4=1.02-\frac{3\times 1.02^3-2\times 1.02-1}{9\times 1.02^2-2}=1.02-\frac{0.14}{7.36}=1.00$$

$$x_5=1.00-\frac{3\times 1.00^3-2\times 1.00-1}{9\times 1.00^2-2}=1.00-\frac{0.00}{7.00}=1.00$$

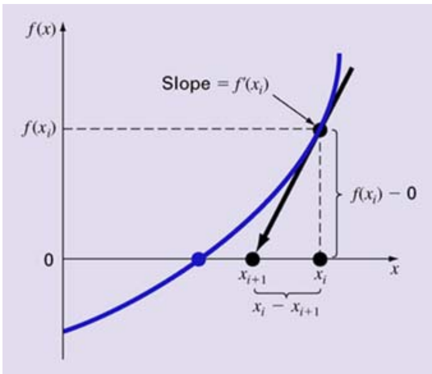
이 되어 계속 계산해도 같은 결과이다. 사실상 $f(1)=0$이므로 구하는 근은 $x=1$이다.

구하는 근의 근사값의 오차를 ε 이하로 한다면, $|x_{n+1}-x_n|\le\varepsilon$일 때 x_{n+1}을 근사근으로 취하고, 또한 $|f(x_{n+1})|\fallingdotseq 0$일 때 x_{n+1}을 근사근으로 취한다.

Newton Raphson 법– Example (2)

Ex) p. 173 예제 6.2

$$f(x)=e^{-x}-x,\qquad x_0=0$$



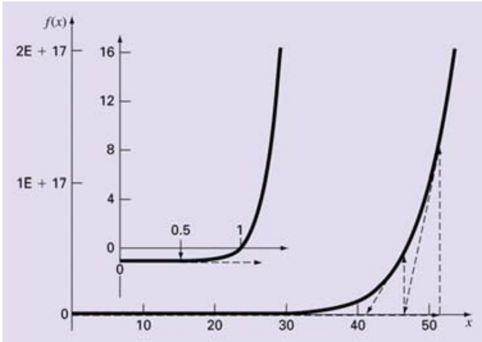
⇒ 4번의 반복계산에 수렴
(고정점 반복법과 비교)

Newton Raphson 법– Example (3)

Ex) p. 174 예제 6.3

$$f(x) = x^{10} - 1, \qquad x_0 = 0.5$$

$$f'(x) = 10x^9$$



=> 총 40번 이상의 반복계산 필요

Newton Raphson 법 – M File

```
function [root, ea, iter] = newtraph(func,dfunc,xr,es,maxit)
%  root = newtraph(func,dfunc,xguess,es,maxit):
%   uses Newton-Raphson method to find the root of a function

% if necessary, assign default values
if nargin<5, maxit=50; end     %if maxit blank set to 50
if nargin<4, es=0.001; end     %if es blank set to 0.001

% Newton-Raphson
iter = 0;
while (1)
  xrold = xr;
  xr = xr – func(xr)/dfunc(xr);
  iter = iter + 1;
  if xr ~= 0, ea = abs((xr - xrold)/xr) * 100; end
  if ea <= es | iter >= maxit, break, end
end
root = xr;
```

Secant Method (할선법)

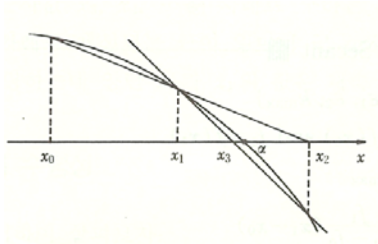
Newton-Raphson 방법에서 $f'(x_1)$ 을 차분으로 대치한 반복법 →

① 식 (1) 을 사용하여 x_2 계산

② $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ 을 계산하고 각각의 부호를 비교

③ 다음 계산에서의 구간 선정 (n = n+1)

(x_n이 수렴할때까지 2, 3 과정 반복)



Secant Method– Example

보기 1 구간 [2, 3] 안에 있는 $f(x)=2x^3-17x^2+40x-25=0$ 의 근을 Secant 법으로 구해보자.

$$f(2)=3>0, \quad f(3)=-4<0$$

이므로, 구간 [2, 3]에는 반드시 근이 있다. 이들 값을 식 (1)에 대입하면

$$x_2=\frac{x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{2(-4)-3(3)}{-4-3}=2.42857$$

다음은 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 써서 x_3를 구한다.

이렇게 차례로 x_3, x_4, …을 구해나가서 $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ (ε은 요구되는 오차)가 되면 x_{n+1}을 근으로 한다.

$$x_3=2.49485, \ x_4=2.49967, \ \cdots, \ x_7=2.50000$$

이 되어 $\varepsilon=0.001$로 할 때, 구하는 근은 $x=2.5$가 된다.

수정된 할선법

❑ 수정된 할선법의 개요

- 할선법은 2개의 초기값 (x_0, x_1) 필요 (단 초기값 사이에서 부호가 변하는 것을 요구하지 않기 때문에 구간법으로 분류되지는 않음)
- 도함수를 계산하기 위해 임의의 두 값을 사용하지 않고 독립변수에 작은 변동량(δ)을 부과하여 계산
- 도함수를 계산하지 않고도 Newton-Raphson의 효율성 제공

$$f'(x) \simeq \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} f(x_i)$$

Ex) P. 179 예제 6.5

MATLAB의 내장함수

❑ **Fzero 함수 (교재 p. 184 ~ 186)**

- 구간법과 개방법 혼용 사용
- 개방법 (초기값 x0) : fzero('function_name', x0)
  - ➲ Ex)
- 구간법 (구간 [x0, x1]) : fzero('function_name', [x0, x1])
  - ➲ Ex)

❑ **Roots 함수 (교재 p. 187 ~ 189)**

- 다항식의 해 계산: $f_n(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^2 + a_n x + a_{n+1}$
- 다항식 계수로 이루어진 벡터 정의: p = [a_1 a_2 … a_{n-1} a_n a_{n+1}]
- 사용 형태 : roots(p)
- roots의 역함수: c = poly(r) => r은 해의 열벡터, c는 다항식 계수 행벡터

파이프 내부를 흐르는 유체(난류)의 마찰계수 (Colebrook 방정식)

$$0 = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2.0\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

where ε (표면거칠기) = 0.0015mm = 0.0000015m, D (직경) = 0.005m

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

where ρ (밀도) = 1.23 kg/m^3, V (속도) = 40 m/s,
μ (동점성계수) = 1.79 x 10^{-5} N-s/m^2

☞ 마찰계수 범위
: 0.008 ~ 0.08

$$g(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2.0\log\left(\frac{0.0000015}{3.7(0.005)} + \frac{2.51}{13743\sqrt{f}}\right)$$