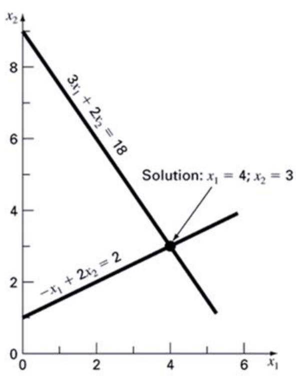
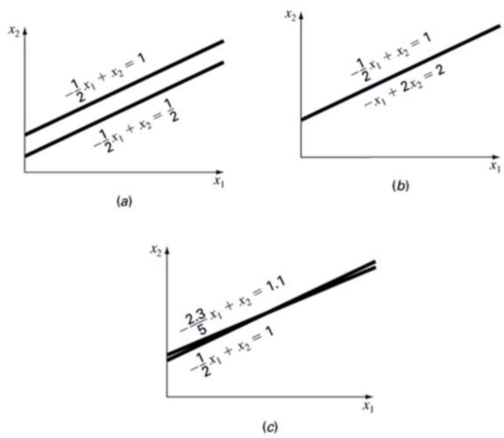
Chap. 8 Gauss 소거법

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} & a_{1n+1} \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} & a_{3n+1}^{(2)} \\
 & & & \cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)}
\end{bmatrix}
$$

선형 연립방정식





Gauss 소거법 – 기본 원리

원리: 다원 1차 연립방정식에서 방정식의 양변에 같은 수를 곱하거나 나누고,
다른 방정식과 더하거나 빼주어도 연립방정식의 근이 변하지 않는다.

Ex) $2x + 3y = 1$ --- (1) :
$3x - 4y = 1$ --- (2) :

식 (3) – (4) : $17y = 1$ → $y = 1/17$

위의 연립방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$2x + 3y = 1$
$0x + 17y = 1$

=> $y = 1/17$, $x = (1-3y)/2 = 7/17$

Gauss 소거법 – 전진 소거

임의의 n원 1차 연립방정식에 대하여

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + . . . + a_{1n}x_n = b_1$ (1)
$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + . . . + a_{2n}x_n = b_2$ (2)
. . . . . .
$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + . . . + a_{nn}x_n = b_n$ (n)

Gauss 소거법 – 후진 대입

단순 소거 과정을 거쳐 소거된 확대 계수행렬은

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + . . . + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)'$$
$$a_{22} x_2 + . . . + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)'$$
$$. . . . . .$$
$$a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{(n-1)n}x_n = b_{(n-1)} \quad (n-1)'$$
$$a_{nn}x_n = b_n \quad (n)'$$

Gauss 소거법 – Summary

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Gauss 소거법 – 예제 9.3 (p.252~253)

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \quad \cdots \quad (1)\\
0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \quad \cdots \quad (2)\\
0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \quad \cdots \quad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \quad \cdots \quad (4)\\
7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \quad \cdots \quad (5)\\
-0.190000x_2 + 10.0200x_3 &= 70.6150 \quad \cdots \quad (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \quad \cdots \quad (7)\\
7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 \quad \cdots \quad (8)\\
10.0120x_3 &= 70.0843 \quad \cdots \quad (9)
\end{aligned}
$$

순수 Gauss 소거법 – M File

```
function x = GaussNaive(A,b)
% x = GaussNaive(A,b):
%   Gauss elimination without pivoting.
% input:
%   A = coefficient matrix
%   b = right hand side vector
% output:
%   x = solution vector

[m,n] = size(A);
if m~=n, error('Matrix A must be square'); end
nb = n+1;
Aug = [A b];
```

```
% forward elimination

for k = 1:n-1
  for i = k+1:n
    factor = Aug(i,k)/Aug(k,k);
    Aug(i,k:nb) = Aug(i,k:nb)-factor*Aug(k,k:nb);
  end
  disp(Aug);
end

% back substitution

x = zeros(n,1);
x(n) = Aug(n,nb)/Aug(n,n);
for i = n-1:-1:1
  x(i) = (Aug(i,nb)-Aug(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Aug(i,i);
end
```

주 1) 가우스 소거법의 연산회수 (p.256 표 9.1)
주 2) 순수 가우스 소거법에서는 a(i,i) 가 0이 될 경우 문제 발생

Gauss 소거법 – 피봇팅 (Pivoting)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ Pivoting의 필요성

- 가우스 소거법 연산과정에서 a_{ii} 로 나눠주는 연산 수행
- a_{ii} 가 0인 경우 'Divide by zero' Error 발생
- a_{ii} 가 0이 아닌 경우라도 0에 가까운 경우 반올림오차에 의한 오차 발생 (Ex. p.258 예제 9.4)

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

❑ Pivoting 방법

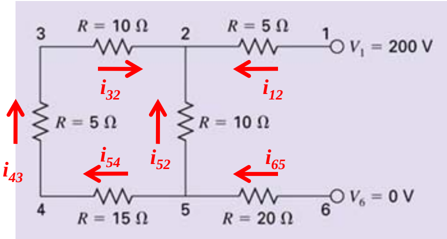
Gauss 소거법 (Pivoting) – M File

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

```
function x = GaussPivot(A,b)
% x = GaussPivot(A,b):
%   Gauss elimination with pivoting.
% input:
%   A = coefficient matrix
%   b = right hand side vector
% output:
%   x = solution vector

[m,n]=size(A);
if m~=n, error('Matrix A must be square'); end
nb=n+1;
Aug=[A b];

% forward elimination
for k = 1:n-1
  % partial pivoting
  [big,i]=max(abs(Aug(k:n,k)));
  ipr=i+k-1;
  if ipr~=k
    Aug([k,ipr],:)=Aug([ipr,k],:);
  end
  for i = k+1:n
    factor=Aug(i,k)/Aug(k,k);
    Aug(i,k:nb)=Aug(i,k:nb)-factor*Aug(k,k:nb);
  end
  disp(Aug);
end

% back substitution
x=zeros(n,1);
x(n)=Aug(n,nb)/Aug(n,n);
for i = n-1:-1:1
  x(i)=(Aug(i,nb)-Aug(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Aug(i,i);
end
```

Matrix Equation

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$



Matlab Command