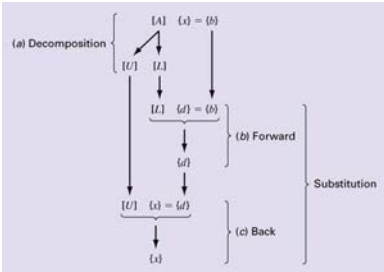
# Chap. 10 LU 분해법과 역행렬






## LU 분해법 (LU Decomposition)

### ❑ Gauss 소거법의 단점

- 가우스 소거법은 전진소거와 후진대입으로 구분
- 전진소거 과정에서 상대적으로 많은 계산 노력 필요
- 행렬 [A]와 우변항 {b}를 합쳐서 소거: [A]{x} = {b} 풀이 과정에서 우변 상수 {b}를 달리 하여 여러번 계산할 경우 비효율적임

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \downarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

### ❑ LU 분해법

- 정방행렬 [A]를 하삼각행렬(Lower triangular matrix) [L]과 상삼각행렬(Upper triangular matrix) [U]로 분리
- 계산시간이 많이 걸리는 행렬 [A]의 소거를 우변항 {b}의 조작과 분리함으로써 계산효율 증대

## LU 분해 (LU Decomposition)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

연립방정식의 계수행렬 A는 항상 다음과 같이 lower matrix (대각 윗부분은 zero) 와 upper matrix (대각 아랫부분은 zero)의 곱으로 표현된다.

--- (1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

- 연립방정식: --- (2)
- 식 (2)에 (1)을 대입하면 --- (3)
- 전진대입법: --- (4)
- 후퇴대입법: --- (5)



## Gauss 소거법과 LU 분해법의 관계

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

### Gauss 소거법에서의 전진소거

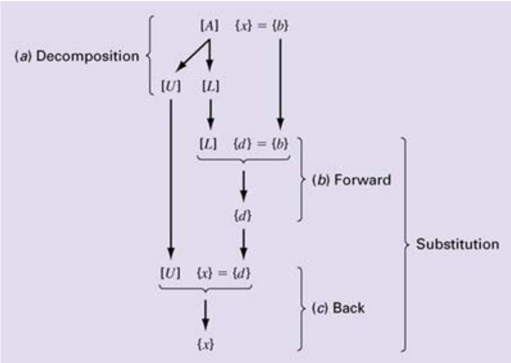
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{bmatrix}$$

- Step 1: 첫번째 행에 인자 $f_{21}$곱하여 $a_{21}$ 소거 :
- Step 2: 첫번째 행에 인자 $f_{31}$곱하여 $a_{31}$ 소거 :
- Step 3: 두번째 행에 인자 $f_{32}$곱하여 $a_{32}$ 소거 :

### LU 분해 : [A] = [L][U]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ f_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ f_{31} & f_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

## LU 분해 – 전진대입법과 후퇴대입법




❖ 전진대입법: [L]{y} = {b}

❖ 후퇴대입법: [U]{x} = {y}



## LU 분해법 – Matlab Command

❑ 내장함수 lu(A) 사용

- Usage: ➔ 행렬 A를 상/하 삼각행렬로 분해
- 부분 피봇팅 사용

❑ [A]{x} = {b} 계산을 위한 LU 분해법

-
-
-
- 예) p. 280 ~ 281 예제 10.4

## Cholesky 분해법

서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

### ❑ Cholesky 분해법의 개요

- 대칭행렬에 대한 LU 분해법
- 대칭행렬: [A] = $[A]^T$ ➔ [A] = $[U]^T[U]$ (or $[L][L]^T$ ) 로 분해 가능
- LU 분해법에 비해 저장공간 및 계산량 절반으로 감소

for $j = i+1, \ldots, n$



## Cholesky 분해법

서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

### ❑ Cholesky 분해법을 사용한 선형대수식 계산

- 계산
- 계산

### ❑ Matlab 내장함수 사용

- ➔ 대칭행렬 A 분해
-
-

문제 설명. 주어진 대칭행렬에 대해 Cholesky 분해를 실시하라.

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

풀이. 첫 번째 행 $(i=1)$에 대해 식 (9.15)를 계산하면 다음과 같다.

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.44949$$

그리고 식 (9.16)을 이용하여 다음을 결정한다.

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2},$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}},$$



Cholesky 분해법 – 예제 10.6 (p. 282)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

두 번째 행 $(i=2)$에 대해서 계산하면 다음과 같다.

$$u_{22} = \quad = \sqrt{55 - (6.123724)^2} = 4.1833$$

$$u_{23} = \quad = \frac{225 - 6.123724(22.45366)}{4.1833} = 20.9165$$

세 번째 행 $(i=3)$에 대해서 계산하면 다음과 같다.

$$u_{33} = \quad = \sqrt{979 - (22.45366)^2 - (20.9165)^2} = 6.110101$$

따라서 다음과 같이 Cholesky 분해를 얻을 수 있다.

$$[U] = \begin{bmatrix} 2.44949 & 6.123724 & 22.45366 \\ & 4.1833 & 20.9165 \\ & & 6.110101 \end{bmatrix}$$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2},$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}},$$

## 역행렬 (Inverse Matrix)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

### ❑ 역행렬의 정의

- $[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$
- $[A]\{x\} = \{b\}$ → $[A]^{-1}[A]\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$ → $\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$

### ❑ 역행렬의 계산

- 우변에 단위벡터들을 놓고 각각의 단위벡터에 대한 해를 구함으로써 열 단위로 계산
- Ex) [A] 가 3 x 3 행렬일 때
  - ➲ $\{b\} = \{1\ \ 0\ \ 0\}^T$로 놓고 {x} 계산: 역행렬의 첫번째 열
  - ➲ $\{b\} = \{0\ \ 1\ \ 0\}^T$로 놓고 {x} 계산: 역행렬의 두번째 열
  - ➲ $\{b\} = \{0\ \ 0\ \ 1\}^T$로 놓고 {x} 계산: 역행렬의 세번째 열
- Gauss법 보다는 LU 분해법을 사용하는 것이 보다 효율적임
- 역행렬 계산 과정에서 상대적으로 많은 계산 노력 필요

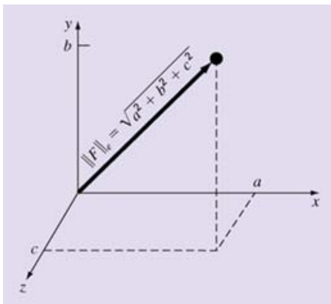


## Vector Norm

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

### ❑ Vector norm: Vector 의 크기를 나타내는 척도

- $||x|| >= 0$ for all $x \in R^n$
- $||x|| = 0$ iff $x = 0$
- $||ax|| = |a|\ ||x||$ for all $a \in R$ and $\mathbf{x} \in R^n$
- $||x+y|| <= ||x|| + ||y||$ for all $x,y \in R^n$




### ❑ Vector Norm의 종류

- Euclidean norm
- p-norm

## Matrix Norm



### ❑ Matrix norm: Matrix 의 크기를 나타내는 척도

- ||A|| >= 0 , ||A|| = 0 iff A=0
- ||aA|| = |a| ||A||
- ||A+B|| <= ||A|| + ||B||
- ||AB|| <= ||A|| ||B||

### ❑ Matrix Norm의 종류

- Euclidean norm
- Row-sum norm　　　　Column-sum norm



## Matrix Condition

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

### ❑ 행렬의 조건수

- Cond[A] =
- [A]의 계수가 t - 자릿수 정밀도 (반올림오차가 $10^{-t}$ 의 크기)를 가지고 Cond[A] = $10^{c}$이면, 해 {x}는 t - c 자릿수까지만 정확함 (상대오차 $10^{c-t}$)
- 조건수가 1에 비해 매우 크다는 것은 시스템이 불량조건에 있음을 의미
- Ex) Hilbert Matrix: p. 201 예제 10.3

### ❑ Matlab command

- 벡터/행렬의 p-Norm 계산: norm(X, p)　　　ex)
- 벡터/행렬의 조건수 계산: cond(X, p)　　　ex)
- p가 생략될 경우 기본값은 2