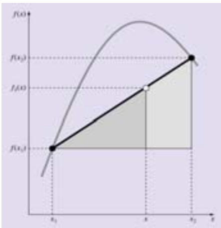
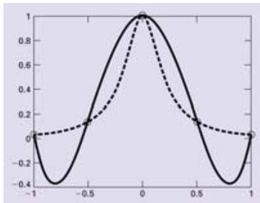
Chap. 17 다항식 보간법 (Interpolation)



- 다항식 보간의 개요
- Newton 보간다항식
- Lagrange 보간다항식
- 외삽법과 진동



[Review] 곡선맞춤 (Curve Fitting)

- **곡선맞춤**
  - 불연속적인 데이터 사이에 있는 점에서의 값 추정시 필요
  - 주어진 데이터를 가장 적절히 표현할 수 있는 함수식 계산
  - 곡선맞춤 종류: 최소제곱 회귀분석 vs. 보간법
- **최소제곱 회귀분석 (Least-Square Regression)**
  - 데이터가 상당한 크기의 오차를 포함하거나 데이터가 산재하는 경우
  - 데이터의 일반 경향을 나타낼 수 있는 단일 곡선을 유도하는 방법
  - 유도된 곡선이 모든 점(데이터)를 포함할 수는 없음
- **보간법 (Interpolation)**
  - 데이터가 매우 정확하게 알려져 있는 경우
  - 각 데이터를 직접 통과하는 하나의 곡선 또는 일련의 곡선을 만드는 방법

다항식 보간법

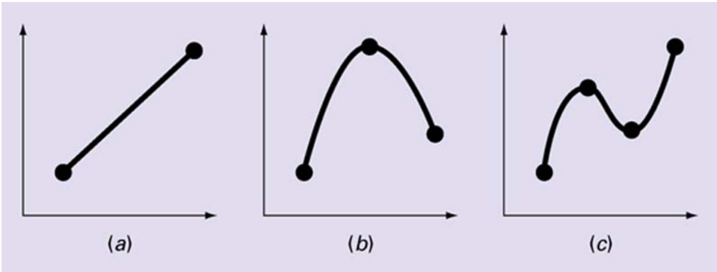
서울과학기술대학교

❑ 다항식 보간법의 개요

- n개의 데이터가 있는 경우 (n-1)차의 다항식 보간 가능

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}$$: 일반적인 표현 형태

$$f(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$: Matlab에서의 사용 형태



다항식 보간법

서울과학기술대학교

❑ 연립방정식을 사용한 보간다항식의 결정

- 3개의 데이터 point $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$
- 2차 보간다항식 $p(x) = p_1 x^2 + p_2 x + p_3$
- 연립방정식 구성

$$p(x_1) = p_1 x_1^{\,2} + p_2 x_1 + p_3 = y_1$$
$$p(x_2) = p_1 x_2^{\,2} + p_2 x_2 + p_3 = y_2$$
$$p(x_3) = p_1 x_3^{\,2} + p_2 x_3 + p_3 = y_3$$

- 행렬식 풀어 계수 결정

$$\begin{bmatrix} x_1^{\,2} & x_1 & 1 \\ x_2^{\,2} & x_2 & 1 \\ x_3^{\,2} & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Ill-conditioned matrix

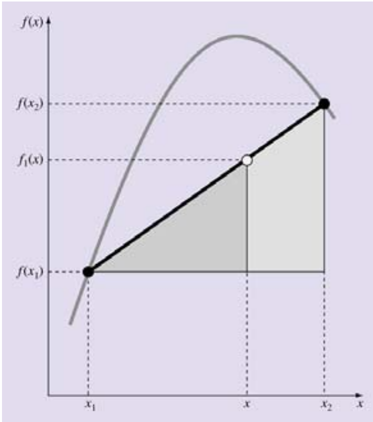
P. 434 예제 17.1

Newton 보간다항식

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 선형보간법

- 두개의 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 사용하여 선형보간한 함수를 $f_1(x)$라 하면



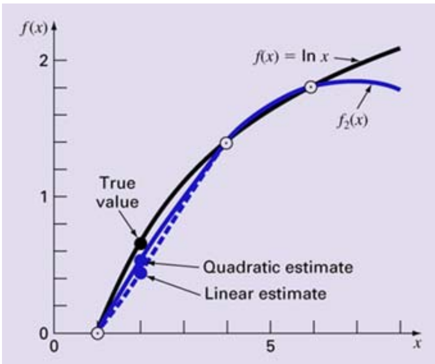
P. 437 예제 17.2

Newton 보간다항식

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 2차보간법

- 3개의 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$를 사용하여 2차보간 : $f_2(x)$



P. 439 예제 17.3

Newton 보간다항식

❑ 일반적인 형태

- n개의 점 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

$$b_1 = f(x_1)$$

$$b_2 = f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$: 1차 유한제차분

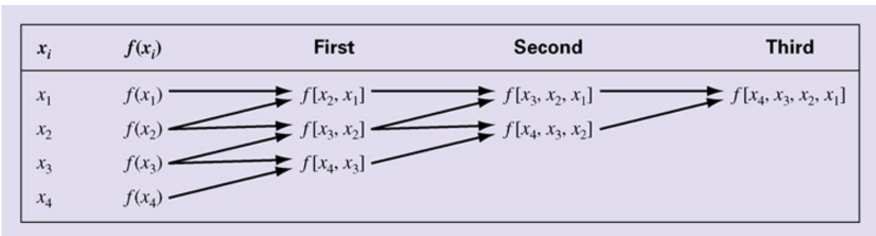
: 2차 유한제차분

: (n-1)차 유한제차분

Newton 보간다항식

❑ 일반적인 형태 (cont'd)

P. 442 예제 17.4



유한제차분의 순환적(recursive) 특성

Newton 보간다항식 – M File

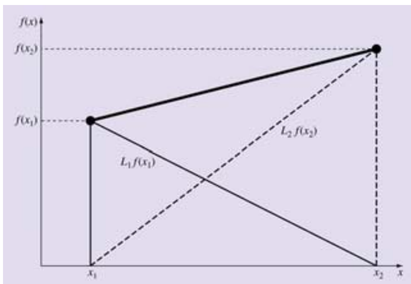
```
function yint = Newtint(x,y,xx)
% yint = Newtint(x,y,xx):
%   Newton interpolation. Uses an (n - 1)-order
%   Newton interpolating polynomial based on n
%   data points (x, y) to determine a value of the
%   dependent variable (yint) at a given value
%   of the independent variable, xx.
% input:
%   x = independent variable
%   y = dependent variable
%   xx = value of independent variable at which
%        interpolation is calculated
% output:
%   yint = interpolated value of dependent variable

% compute the finite divided differences in the
% form of a difference table
n = length(x);
if length(y)~=n, error('x and y must be same
length');end
```

```
b = zeros(n,n);

% assign dependent variables to the first column of b
b(:,1) = y(:);  % y is a column vector.

for j = 2:n
  for i = 1:n-j+1
    b(i,j) = (b(i+1,j-1)-b(i,j-1))/(x(i+j-1)-x(i));
  end
end

% use the finite divided differences to interpolate
xt = 1;
yint = b(1,1);
for j = 1:n-1
  xt = xt*(xx-x(j));
  yint = yint+b(1,j+1)*xt;
end
```


Lagrange 보간다항식

❑ 선형보간법

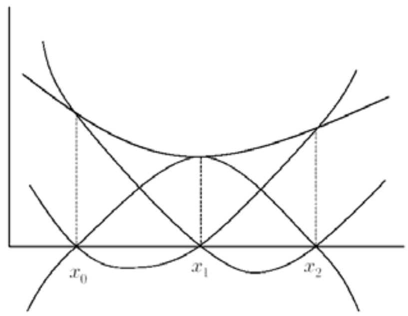
- 두개의 점 (x_1, $f(x_1)$), (x_2, $f(x_2)$)를 사용하여 선형보간한 함수를 $f_1(x)$라 하면



❑ 2차보간법

- 3개의 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$를 사용하여 2차보간 : $f_2(x)$

P. 446 예제 17.5



❑ 일반적인 형태

- n개의 점 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$where, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrange 보간다항식 – M File

```
function yint = Lagrange(x,y,xx)

% yint = Lagrange(x,y,xx):
%   Lagrange interpolation. Uses an (n - 1)-order Lagrange
%   interpolating polynomial based on n data points (x, y)
%   to determine a value of the dependent variable (yint)
%   at a given value of the independent variable, xx.
% input:
%   x = independent variable
%   y = dependent variable
%   xx = value of independent variable at which the
%        interpolation is calculated
% output:
%   yint = interpolated value of dependent variable

n = length(x);
if length(y)~=n, error('x and y must be same length'); end
```

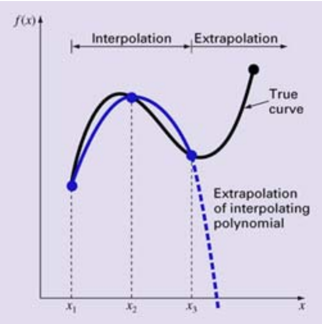
```
s = 0;

for i = 1:n
  product = y(i);
  for j = 1:n
    if i ~= j
      product = product*(xx-x(j))/(x(i)-x(j));
    end
  end
  s = s+product;
end

yint = s;
```

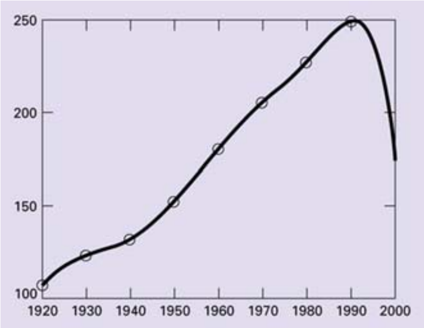

외삽법 (Extrapolation)

❑ 내삽법과 외삽법

- 내삽법(Interpolation): x_1, x_2, …, x_n의 범위 내에 있는 f(x) 값 계산
- 외삽법(Extrapolation): x_1, x_2, …, x_n의 범위 밖에 있는 f(x) 값 계산

P. 449 예제 17.6



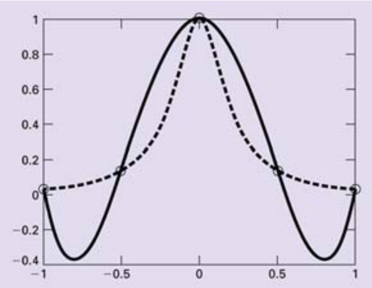


다항식 보간시 유의사항

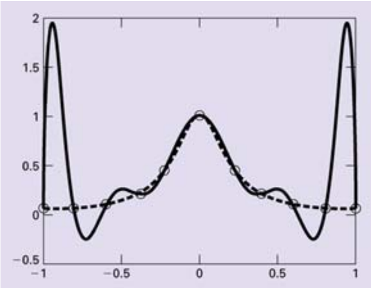
❑ 고차 다항식보간의 위험성

P. 451 예제 17.3

- 다항식 차수가 높아지면 진동 발생 위험
- 고차다항식의 경우 반올림 오차에 민감하여 불량한 조건이 되기 쉬움



Runge 함수: 5개 점, 4차 다항식 접합



Runge 함수: 11개 점, 10차 다항식 접합