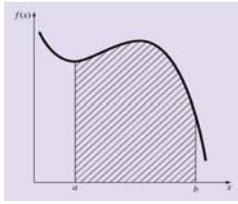
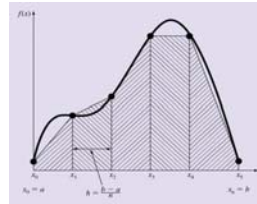


Chap. 19 수치적분 (Numerical Integration)



- ❖ 수치적분 개요
- ❖ 사다리꼴 공식
- ❖ Simpson의 공식

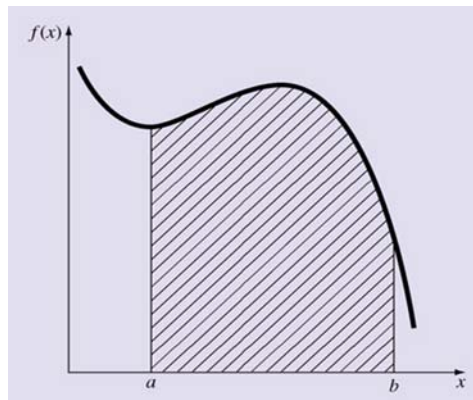


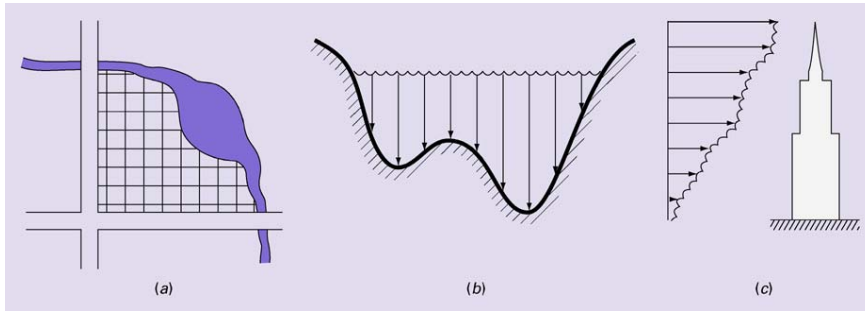
적분의 개념

$$\int_a^b f(x)dx$$

: 구간 [a, b]에서의
 $f(x)$ 곡선 아래의 면적

=> 특정 구간에서 주어진
물리적 변수의 총량 또는 총
합 의미

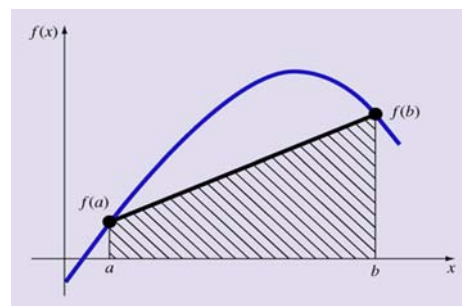




강물과 길로 둘러싸인
들판의 면적 계산

강물의 단면적 계산

고층 건물의 측면에 부는
바람에 의한 유효힘 계산

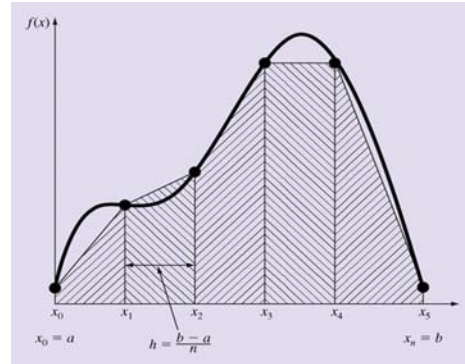
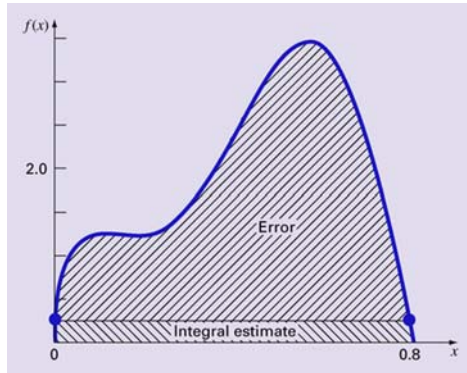


사다리꼴 공식에서의 절단오차

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \Rightarrow$$

P. 500 예제 19.1

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$



합성 (Composite) 사다리꼴 공식

let $h = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

절단오차 $E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}'' \Rightarrow E_t \propto \frac{1}{n^2}$: 1차의 정확도

```
function I = trap(func,a,b,n)
% I = trap(func,a,b,n):
% multiple-application trapezoidal rule.
% input:
% func = name of function to be integrated
% a, b = integration limits
% n = number of segments
% output:
% I = integral estimate

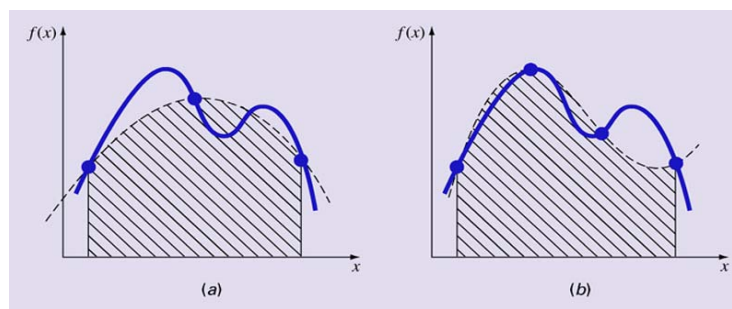
x = a;
h = (b - a)/n;
s = func(a);
for i = 1 : n-1
    x = x + h;
    s = s + 2*func(x);
end
s = s + func(b);
I = (b - a) * s/(2*n);
```

P. 324 예제 16.2

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Simpson 공식

- 사다리꼴 공식: 구간을 나누어 데이터점간 선형보간 기초로 면적 계산
- Simpson 공식: 구간을 나누어 데이터점간 고차다항식 보간 기초로 면적 계산



Simpson 1/3 공식: 세 점을 연결하는 포물선 아래에 있는 면적 계산

Simpson 3/8 공식: 네 점을 연결하는 3차곡선 아래에 있는 면적 계산

Simpson의 1/3 공식

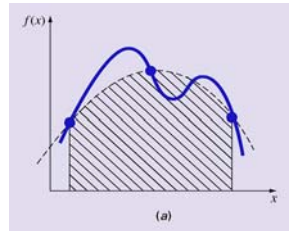
세 점을 연결하는 Lagrange 보간다항식 (2차)

P. 507 예제 19.3

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

where $h = \frac{b-a}{2}, x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = b$

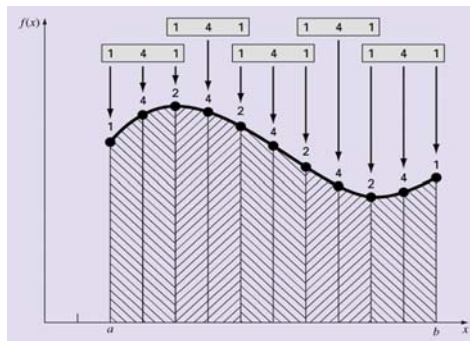
$$E_t = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad : 3\text{차의 정확도}$$



합성 Simpson의 1/3 rule

$$\begin{aligned} E_t &= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \\ &= -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \\ \therefore E_t &\propto \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

P. 509 예제 19.4



Simpson의 3/8 공식

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)
 \end{aligned}$$

where $h = \frac{b-a}{3}, x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = b$

Simpson의 3/8 공식

$$\begin{aligned}
 E_i = & -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \\
 = & -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)
 \end{aligned}$$

분모 비교

Simpson의 1/3 공식: 2880

Simpson의 3/8 공식: 6480

P. 511 예제 19.5

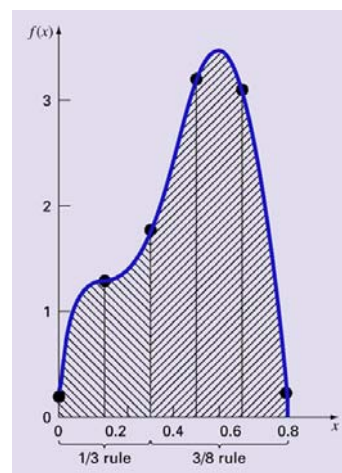


TABLE 16.2 Newton-Cotes closed integration formulas. The formulas are presented in the format of Eq. (16.13) so that the weighting of the data points to estimate the average height is apparent. The step size is given by $h = (b - a)/n$.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b - a) \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3 f''(\xi)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b - a) \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	5	Boole's rule	$(b - a) \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7 f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b - a) \frac{19f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 19f(x_5)}{288}$	$-(275/12,096)h^7 f^{(6)}(\xi)$

- Simpson의 1/3 공식(3 points)과 3/8 공식(4 points)의 오차의 차수는 같음
- 일반적으로 짝수 구간(segment) - 홀수 점(point) 공식을 선호
- 실제 공학 문제에서 합성 Simpson 1/3 공식이 널리 사용 (정확도는 구간 늘려서 향상)