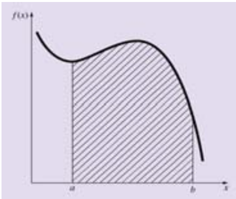
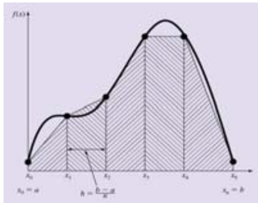
Chap. 19 수치적분 (Numerical Integration)



- 수치적분 개요
- 사다리꼴 공식
- Simpson의 공식

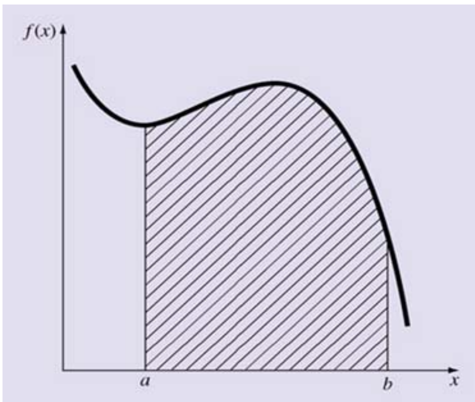


적분의 개념

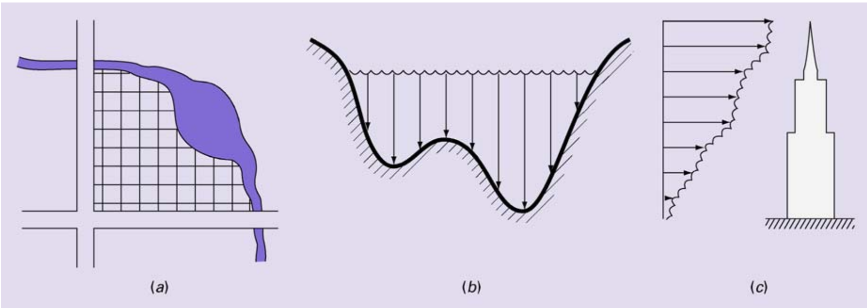
$$\int_a^b f(x)dx$$

: 구간 [a, b]에서의
$f(x)$ 곡선 아래의 면적

=> 특정 구간에서 주어진 물리적 변수의 총량 또는 총합 의미



적분의 응용사례

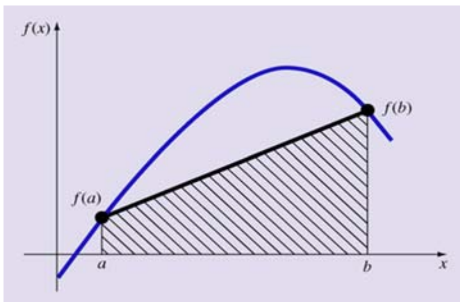


강물과 길로 둘러싸인 들판의 면적 계산

강물의 단면적 계산

고층 건물의 측면에 부는 바람에 의한 유효힘 계산

사다리꼴 공식 (Trapezoid rule)



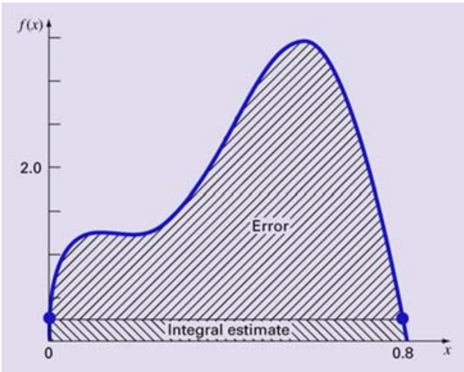
사다리꼴 공식에서의 절단오차

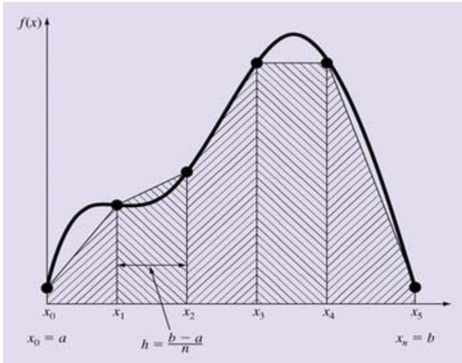
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \Rightarrow$$

수치적분에서의 구간의 영향

P. 497 예제 19.1

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$





합성 (Composite) 사다리꼴 공식

$$let\ h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

절단오차 $$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}'' \Rightarrow E_t \propto \frac{1}{n^2}$$

합성 사다리꼴 공식 – M File

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

```
function I = trap(func,a,b,n)
% I = trap(func,a,b,n):
%    multiple-application trapezoidal rule.
% input:
%   func = name of function to be integrated
%   a, b = integration limits
%   n = number of segments
% output:
%   I = integral estimate

x = a;
h = (b - a)/n;
s = func(a);
for i = 1 : n-1
  x = x + h;
  s = s + 2*func(x);
end
s = s + func(b);
I = (b - a) * s/(2*n);
```

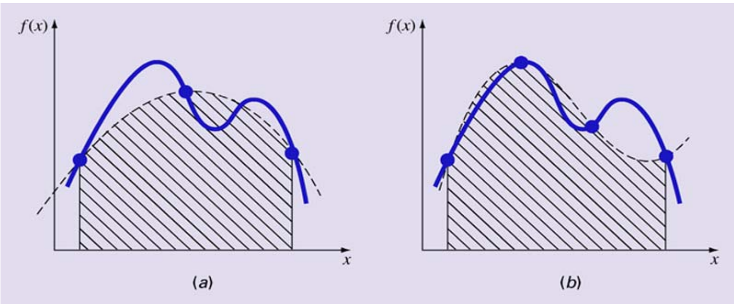
P. 500 예제 19.2

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Simpson 공식

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

- 사다리꼴 공식: 구간을 나누어 데이터점간 선형보간 기초로 면적 계산
- Simson 공식: 구간을 나누어 데이터점간 고차다항식 보간 기초로 면적 계산



Simson 1/3 공식: 세 점을 연결하는 포물선 아래에 있는 면적 계산

Simson 3/8 공식: 네 점을 연결하는 3차곡선 아래에 있는 면적 계산

Simpson의 1/3 공식

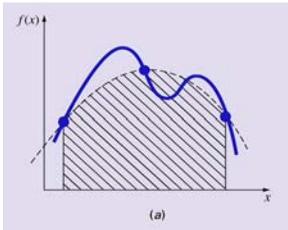
세 점을 연결하는 Lagrange 보간다항식 (2차)

P. 504 예제 19.3

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$\text{where}\ \ h=\frac{b-a}{2},x_0=a,x_1=x_0+h,x_2=b$$

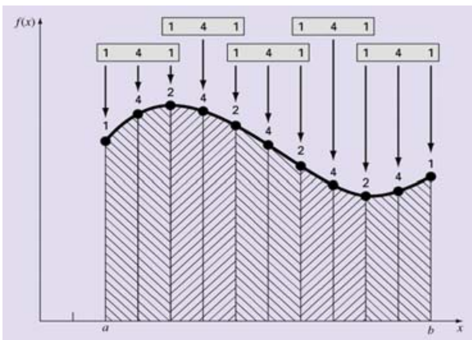
$$E_t=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$$: 3차의 정확도



합성 Simpson의 1/3 rule

$$E_t=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$
$$=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi)$$

P. 506 예제 19.4



Simpson의 3/8 공식

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

$$where \;\; h = \frac{b-a}{3}, x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = b$$

Simpson의 3/8 공식

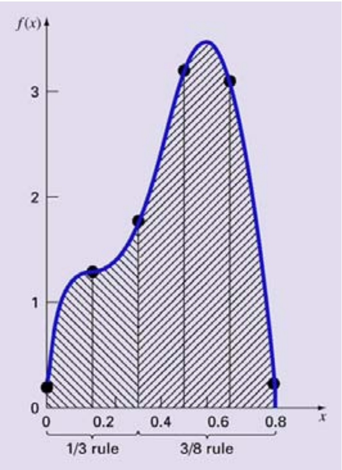
$$E_t = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$
$$= -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

분모 비교

Simson의 1/3 공식: 2880

Simson의 3/8 공식: 6480

P. 508 예제 19.5



Newton-Cotes 의 폐구간 적분공식

서울과학기술대학교
SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

TABLE 16.2 Newton-Cotes closed integration formulas. The formulas are presented in the format of Eq. (16.13) so that the weighting of the data points to estimate the average height is apparent. The step size is given by $h = (b - a)/n$.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3 f''(\xi)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	5	Boole's rule	$(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7 f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b-a)\dfrac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$	$-(275/12{,}096)h^7 f^{(6)}(\xi)$

- Simpson의 1/3 공식(3 points)과 3/8 공식(4 points)의 오차의 차수는 같음
- 일반적으로 짝수 구간(segment) - 홀수 점(point) 공식을 선호
- 실제 공학 문제에서 합성 Simpson 1/3 공식이 널리 사용 (정확도는 구간 늘려서 향상)