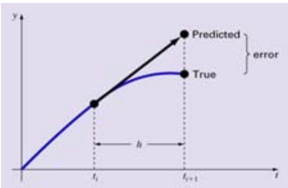
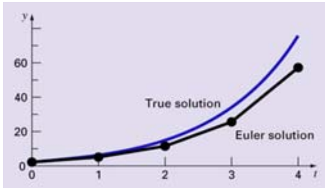
Chap. 22 상미분방정식의 해법



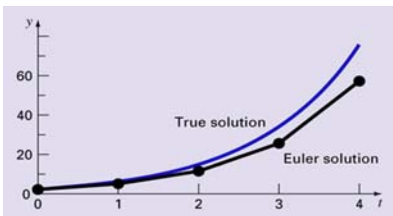
- Euler법
- Heun 법
- 중점법
- Runge-Kutta법



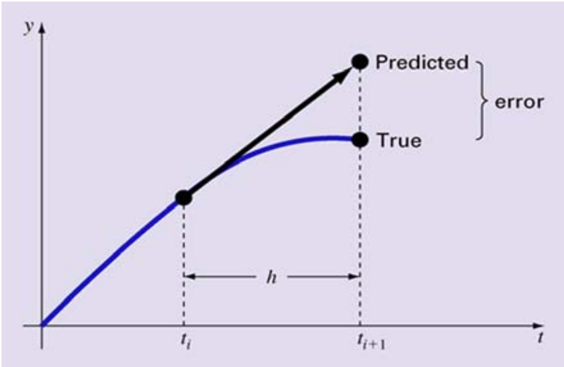
상미분방정식

- 상미분방정식 (Ordinary Differential Equation; ODE)

- One-step method
  - Euler 법 (Euler's method)
  - Heun 법 (Heun's method)
  - 중점법 (Midpoint method)
  - Runge-Kutta 법 (RK method)
- Multistep method
  - Adaptive Runge-Kutta method



Euler's Method



Euler 법에서의 오차해석

Taylor 급수전개

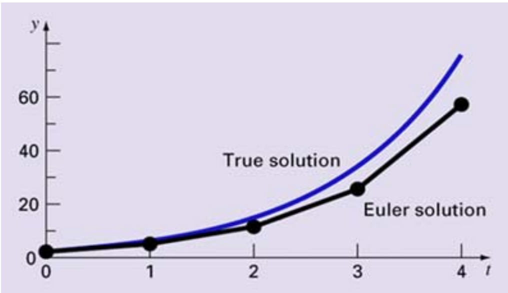
절단오차

Ex) P. 592 예제 22.1

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

y=2 at t=0, step size =1

$$y(t) = \frac{4}{1.3}(e^{0.8t} - e^{-0.5t}) + 2e^{-0.5t}$$



Euler법 – M File

```
function [t,y] = Eulode(dydt,tspan,y0,h)
% [t,y] = Eulode(dydt,tspan,y0,h):
%   uses Euler's method to integrate an ODE
% input:
%   dydt = name of the M-file that evaluates ODE
%   tspan = [ti, tf] where ti and tf = initial and
%           final values of independent variable
%   y0 = initial value of dependent variable
%   h = step size
% output:
%   t = vector of independent variable
%   y = vector of solution for dependent variable

ti = tspan(1);
tf = tspan(2);
t = (ti:h:tf)';
n = length(t);
```

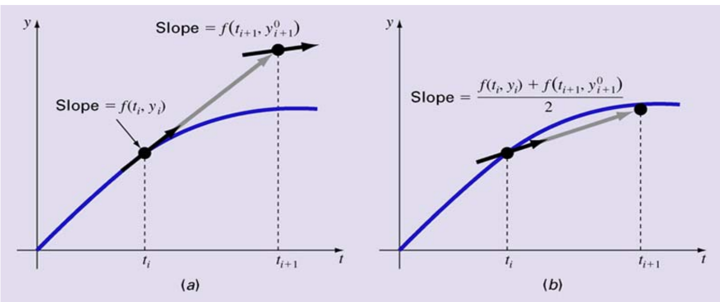
```
ti = tspan(1);
tf = tspan(2);
t = (ti:h:tf)';
n = length(t);

% if necessary, add an additional value of t
% so that range goes from t = ti to tf
if t(n) < tf
  t(n+1) = tf;
  n = n+1;
end

y = y0*ones(n,1); %preallocate y to improve
efficiency
for i = 1:n-1  %implement Euler's method
  y(i+1) = y(i) + dydt(t(i),y(i))*(t(i+1)-t(i));
end
```


Heun's method

- Euler법: 구간의 시작점에서의 도함수를 구간 전체에 적용함으로 인해 오차 발생
- 시작점에서의 도함수 및 끝점에서의 도함수 이용
- 예측자(predictor)와 수정자(corrector) 사용



predictor corrector

Heun’s method

predictor :

corrector :

$$y_{i+1}^{j} \longleftarrow y_i^{m} + \frac{f(t_i, y_i^{m}) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{j-1})}{2}h$$

개선된 결과를 얻기 위한 Heun법 수정자의 그래픽 표현

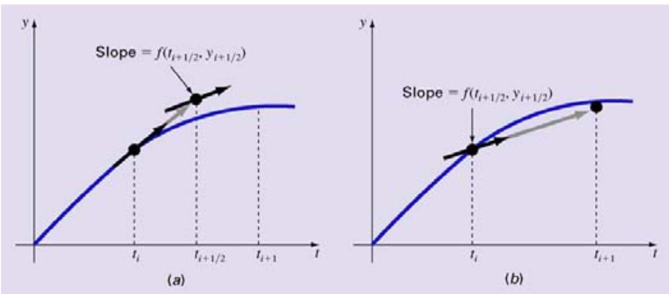
수정자의 수렴에 대한 종료 판정:

Ex) P. 600 예제 22.2

중점법 (Midpoint method)

predictor :

corrector :



Runge-Kutta 법

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

고차 도함수를 구하지 않고도 Taylor 급수 방법이 가지는 정확도를 가짐

: n차 Runge-Kutta법 (보통 2차/4차 많이 사용)

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

n = 1, a_1 = 1: Euler법

$$y_{i+1} = y_i + \phi h = y_i + f(x_i, y_i) h$$

Runge-Kutta 법 (2차)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

2차 Runge-Kutta 표현

상수 a_1, a_2, p_1 그리고 q_{11}를 결정하기 위하여 2차 Taylor 급수와 같다고 가정

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i) h + \frac{f'(t_i, y_i)}{2!} h^2$$

Where $f'(t_i, y_i) = \dfrac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y} \dfrac{dy}{dt}$

식 3개, 미지수 4개
➲ 불능

a_2의 배정(가정) 후 나머지 계수 결정 ➲ 2차 RK법은 a_2의 배정에 따라 무한히 많은 종류가 있다

Runge-Kutta 법 (2차)

❑ 반복이 없는 Heun법

- $a_2 = 1/2 \rightarrow a_1 = ½,\ \ p_1 = q_{11} = 1$

Where

⇒ Heun법에서 수정자의 반복이 없는 경우에 해당

❑ 중점법

- $a_2 = 1 \rightarrow a_1 = 0,\ \ p_1 = q_{11} = 1/2$

Where

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

(**k_1, k_2** : 구간의 시작/끝에서의 기울기)

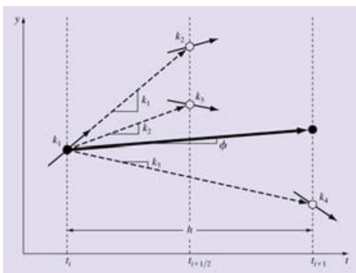
Runge-Kutta 법 (4차)

❑ 전형적인 4차 Runge-Kutta법

Ex) P. 608 예제 22.3

- 가장 보편적으로 사용되는 4차 RK법
- Simpson 1/3 공식과 유사함
- 간격에 대한 평균 기울기를 개선하기 위해 여러 기울기값을 추정 (Heun법과 유사)

Where

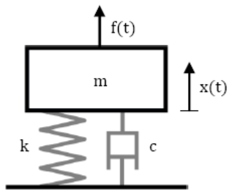


연립 미분방정식의 필요성

❑ 고차 미분방정식의 풀이

- 예) 1자유도 진동방정식 : 2차 미분방정식

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad \ldots (1)$$



- 종속변수의 1차 도함수를 새로운 변수로 정의

… (2)

- 식 (2)를 식 (1)에 대입하면

$$m\frac{dv}{dt}+cv+kx=0$$

: 연립 미분방정식

연립 미분방정식의 풀이

❑ n차 미분방정식

- n개의 연립 미분방정식으로 변환하여 풀이
- 시작값 t에서 n개의 초기 조건 필요
- 예) 번지점프를 하는 사람의 속도와 위치를 모두 결정해야 하는 경우

$$\frac{dx}{dt}=v \qquad \frac{dv}{dt}=g-\frac{c_d}{m}v^2$$

초기 조건: $x(0)=v(0)=0$

❑ 연립 미분방정식의 수치해법

- 연립 Euler법
- 연립 Runge-Kutta법

Euler법을 사용한 연립 상미분방정식 풀이

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Ex) P. 611 예제 22.4 (번지점프 문제)

$$\frac{dx}{dt}=v \qquad \frac{dv}{dt}=g-\frac{c_d}{m}v^2 \qquad x(0)=v(0)=0, \quad t=10\text{s}, \quad h=2\text{s}$$

Analytic solution: $v(t)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$ $\quad x(t)=\frac{m}{c_d}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)\right]$

풀이)

t = 0에서의 기울기: $\frac{dx}{dt}=0 \qquad \frac{dv}{dt}=9.81-\frac{0.25}{68.1}(0)^2=9.81$

Euler법 (t = 2 s)	해석 해	백분율 상대 오차
$x=0+0(2)=0$	$x(2)$ = 19.16629	100%
$v=0+9.81(2)=19.62$	$v(2)$ = 18.72919	4.756%

Euler법 (t = 4 s)

$x=0+19.62(2)=39.24$

$$v=19.62+\left(9.81-\frac{0.25}{68.1}(19.62)^2\right)(2) \quad =36.41368$$

$$x_{i+1}=x_i+\phi h$$
$$v_{i+1}=v_i+\phi h$$

Euler법을 사용한 연립 상미분방정식 풀이

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Ex) P. 611 예제 22.4 (번지점프 문제)

t	x_{true}	v_{true}	x_{Euler}	v_{Euler}	$\varepsilon_t(x)$	$\varepsilon_t(v)$
0	0	0	0	0		
2	19.1663	18.7292	0	19.6200	100.00	4.76
4	71.9304	33.1118	39.2400	36.4137	45.45	9.97
6	147.9462	42.0762	112.0674	46.2983	24.25	10.03
8	237.5104	46.9575	204.6640	50.1802	13.83	6.86
10	334.1782	49.4214	305.0244	51.3123	8.72	3.83

- 간격 크기가 커서 결과가 정확하지 않음
- 두 번째 반복을 수행하기까지 x_{Euler}는 0으로 계산됨.
- 간격 크기를 줄이면 결과를 개선시킬 수 있음.
- 고차 방법을 사용하면 상대적으로 큰 간격에 대해서도 좋은 결과를 얻을 수 있음

연립 Runge-Kutta 법

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ R-K 법을 사용한 연립 상미분방정식 풀이

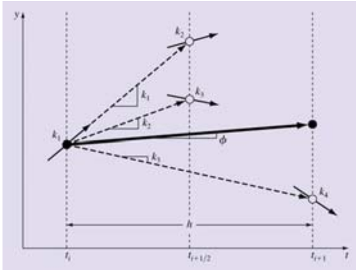
- 고차 RK법은 연립방정식의 해를 구하는데 적용 가능.
- 기울기를 구하는데 주의해야 함.
- 간격의 시작점에서 모든 변수에 대해 기울기(k_1's) 결정
- k_1's 를 이용하여 간격의 중점에서의 기울기 (k_2's) 예측.
- 중점에서의 새로운 기울기(k_3's)를 예측.
- 간격의 끝점에서의 기울기(k_4's)를 예측.
- 모든 k가 증분함수에서 합성되어 간격 끝에서의 함수 값이 결정.

Where $k_1 = f(t_i, y_i)$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(t_i + h, y_i + k_3 h\right)$$



연립 Runge-Kutta 법

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Ex) P. 612 예제 22.5 (번지점프 문제)

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad \frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2 \qquad x(0) = v(0) = 0, \quad t = 10\text{s}, \quad h = 2\text{s}$$

Analytic solution: $v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$ $\quad x(t) = \frac{m}{c_d}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)\right]$

상미분방정식을 다음과 같이 표시

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, v) = v$$

$$\frac{dv}{dt} = f_2(t, x, v) = g - \frac{c_d}{m}v^2$$

① 간격의 시작점에서 x와 v에 대한 기울기를 계산

$$k_{1,1} = f_1(0, 0, 0) = 0$$

$$k_{1,2} = f_2(0, 0, 0) = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(0)^2 = 9.81$$

where $k_{i,j}$: j-번째 종속변수의 i-번째 k값

② 간격의 중점에서 x와 v의 첫 번째 값 계산

$$x(1) = x(0) + k_{1,1}\frac{h}{2} = 0 + 0\frac{2}{2} = 0$$

$$v(1) = v(0) + k_{1,2}\frac{h}{2} = 0 + 9.81\frac{2}{2} = 9.81$$

③ 간격의 중점에서 x와 v에 대한 기울기 계산

$$k_{2,1} = f_1(1, 0, 9.81) = 9.8100$$

$$k_{2,2} = f_2(1, 0, 9.81) = 9.4567$$

연립 Runge-Kutta 법

Ex) P. 612 예제 22.5 (번지점프 문제)

$$k_1 = f(t_i, y_i) \qquad k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \qquad k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \qquad k_4 = f\left(t_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

④ 간격의 중점에서 x와 v의 두 번째 값 계산

$$x(1) = x(0) + k_{2,1}\frac{h}{2} = 0 + 9.8100\frac{2}{2} = 9.8100$$

$$v(1) = v(0) + k_{2,2}\frac{h}{2} = 0 + 9.4567\frac{2}{2} = 9.4567$$

⑤ 간격의 중점에서 x와 v에 대한 기울기 다시 계산

$$k_{3,1} = f_1(1, 9.8100, 9.4567) = 9.4567$$

$$k_{3,2} = f_2(1, 9.8100, 9.4567) = 9.4817$$

⑥ 간격의 끝점에서 x와 v의 값 계산

$$x(2) = x(0) + k_{3,1}h = 0 + 9.4567(2) = 18.9134$$

$$v(2) = v(0) + k_{3,2}h = 0 + 9.4817(2) = 18.9634$$

⑦ 간격의 끝점에서 x와 v의 기울기 계산

$$k_{4,1} = f_1(2, 18.9134, 18.9634) = 18.9634$$

$$k_{4,2} = f_2(2, 18.9134, 18.9634) = 8.4898$$

연립 Runge-Kutta 법

Ex) P. 612 예제 22.5 (번지점프 문제)

⑧ 전 과정에서 구한 k 합하여 최종적으로 x와 v의 값 계산

$$x(2) = 0 + \frac{1}{6}[0 + 2(9.8100 + 9.4567) + 18.9634]2 = 19.1656$$

$$v(2) = 0 + \frac{1}{6}[9.8100 + 2(9.4567 + 9.4817) + 8.4898]2 = 18.7256$$

t	x_{true}	v_{true}	x_{RK4}	v_{RK4}	$\varepsilon_t(x)$	$\varepsilon_t(v)$
0	0	0	0	0		
2	19.1663	18.7292	19.1656	18.7256	0.004	0.019
4	71.9304	33.1118	71.9311	33.0995	0.001	0.037
6	147.9642	42.0762	147.9521	42.0547	0.004	0.051
8	237.5104	46.9575	237.5104	46.9345	0.000	0.049
10	334.1782	49.4214	334.1626	49.4207	0.005	0.038

연립 Runge-Kutta 법 – M File

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

```
function [tp,yp] = rk4sys(dydt,tspan,y0,h,varargin)
% rk4sys: 4th-order R-K for a system of ODEs

if nargin<4,error('at least 4 input arguments required'),end
if any(diff(tspan)<=0),error('check tspan order'), end
n = length(tspan);
ti = tspan(1);tf = tspan(n);
if n == 2
  t = (ti:h:tf)'; n = length(t);
  if t(n)<tf
    t(n+1) = tf;
    n = n+1;
  end
else
  t = tspan;
end

tt = ti; y(1,:) = y0;
np = 1; tp(np) = tt; yp(np,:) = y(1,:);
i=1;
```

```
while(1)
  tend = t(np+1);
  hh = t(np+1) - t(np);
  if hh>h,hh = h;end
  while(1)
    if tt+hh>tend,hh = tend-tt;end
    k1 = dydt(tt,y(i,:),varargin{:})';
    ymid = y(i,:) + k1.*hh./2;
    k2 = dydt(tt+hh/2,ymid,varargin{:})';
    ymid = y(i,:) + k2*hh/2;
    k3 = dydt(tt+hh/2,ymid,varargin{:})';
    yend = y(i,:) + k3*hh;
    k4 = dydt(tt+hh,yend,varargin{:})';
    phi = (k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
    y(i+1,:) = y(i,:) + phi*hh;
    tt = tt+hh;
    i=i+1;
    if tt>=tend,break,end
  end
  np = np+1; tp(np) = tt; yp(np,:) = y(i,:);
  if tt>=tf,break,end
end
```


연립 Runge-Kutta 법 – M File 실행

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Step 1. 상미분방정식 정의를 위한 **m-file** 작성

```
function dy = dydtsys(t,y)
dy = [y(2); 9.81-0.25/68.1*y(2)^2];
```

Step 2. rk4sys.m-file 실행 **(**구간 **0~10,** 간격 **2)**

```
>>
>>

         0         0         0
    2.0000   19.1656   18.7256
    4.0000   71.9311   33.0995
    6.0000  147.9521   42.0547
    8.0000  237.5104   46.9345
   10.0000  334.1626   49.4027
```

Step 3. 그래프를 통한 결과확인 (간격 세분화)

```
>>
>>
>>
```

Matlab 내장함수 (적응식 R-K법)

- **Ode23**
  - Bogacki와 Shampine, 1989
  - 2차와 3차 RK법 사용
- **Ode45**
  - Dormand와 Prince, 1990
  - 4차와 5차 RK법 사용
  - 가장 널리 사용
- **Ode113**
  - 변동 차수를 갖는 Adams-Bashforth-Moulton 해법
  - 엄격한 오차 공차나 계산 집약적 상미분방정식을 다루기에 적합

사용예 (ode45)

```
>> [t, y] =
```

tspan 정의방법

```
>>        --- 구간 정의
>>        --- 특정 시간
```


Matlab 내장함수 (적응식 R-K법)

Ex) P. 616 사례연구 22.6 (포식자-피식자 모델)

$$\frac{dy_1}{dt} = 1.2y_1 - 0.6y_1y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -0.8y_2 + 0.3y_1y_2, \quad y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 1$$

Step 1. 상미분방정식 정의를 위한 m-file 작성

```
function yp = predprey(t,y)
  yp = [1.2*y(1) – 0.6*y(1)*y(2); -0.8*y(2) + 0.3*y(1)*y(2)];
```

Step 2. 내장함수 실행 및 그래프 확인

```
>> tspan = [0 20];
>> y0 = [2, 1];
>> [t,y] = ode45(@predprey, tspan, y0);
>> plot(t,y)
>> plot(y(:,1),y(:,2))   %상태공간 그림
```