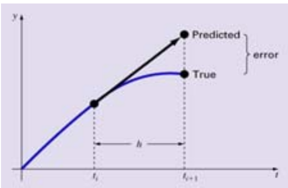
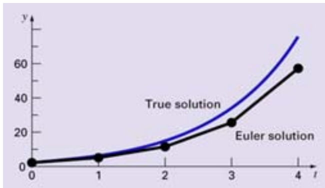
Chap. 22 상미분방정식의 해법



- ❖ Euler법
- ❖ Heun 법
- ❖ 중점법
- ❖ Runge-Kutta법



상미분방정식

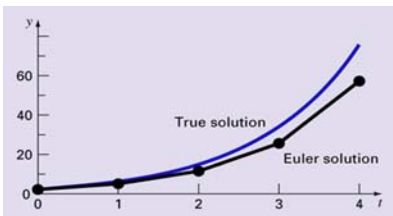
❑ 상미분방정식 (Ordinary Differential Equation; ODE)

❑ **One-step method**

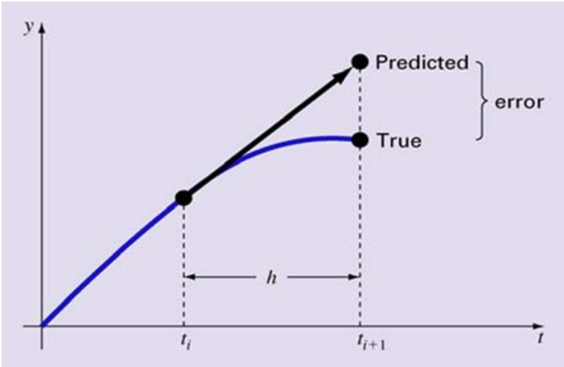
- Euler 법 (Euler's method)
- Heun 법 (Heun's method)
- 중점법 (Midpoint method)
- Runge-Kutta 법 (RK method)

❑ **Multistep method**

- Adaptive Runge-Kutta method



Euler's Method



Euler 법에서의 오차해석

Taylor 급수전개

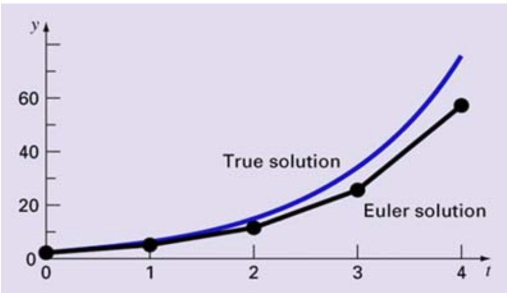
절단오차 $R_n = \dfrac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \Rightarrow O(h^{n+1})$

Ex) P. 584 예제 22.1

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

$y=2$ at $t=0$, step size =1

$$y(t) = \frac{4}{1.3}(e^{0.8t} - e^{-0.5t}) + 2e^{-0.5t}$$



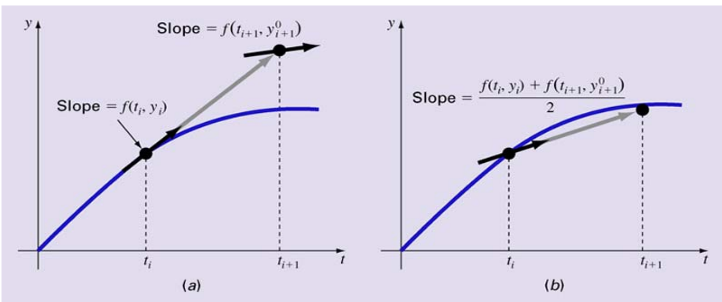
Euler법 – M File


```
function [t,y] = Eulode(dydt,tspan,y0,h)
% [t,y] = Eulode(dydt,tspan,y0,h):
%   uses Euler's method to integrate an ODE
% input:
%   dydt = name of the M-file that evaluates ODE
%   tspan = [ti, tf] where ti and tf = initial and
%           final values of independent variable
%   y0 = initial value of dependent variable
%   h = step size
% output:
%   t = vector of independent variable
%   y = vector of solution for dependent variable

ti = tspan(1);
tf = tspan(2);
t = (ti:h:tf)';
n = length(t);
```

```
% if necessary, add an additional value of t
% so that range goes from t = ti to tf
if t(n) < tf
  t(n+1) = tf;
  n = n+1;
end

y = y0*ones(n,1); %preallocate y to improve
efficiency
for i = 1:n-1  %implement Euler's method
  y(i+1) = y(i) + dydt(t(i),y(i))*(t(i+1)-t(i));
end
```


Heun's method

- Euler법: 구간의 시작점에서의 도함수를 구간 전체에 적용함으로 인해 오차 발생
- 시작점에서의 도함수 및 끝점에서의 도함수 이용
- 예측자(predictor)와 수정자(corrector) 사용

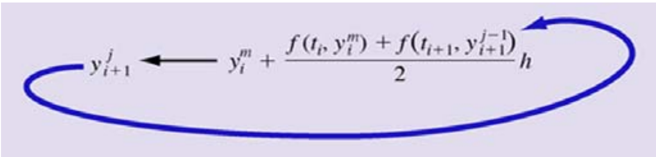


predictor corrector

Heun's method

predictor :

corrector :



개선된 결과를 얻기 위한 Heun법 수정자의 그래픽 표현

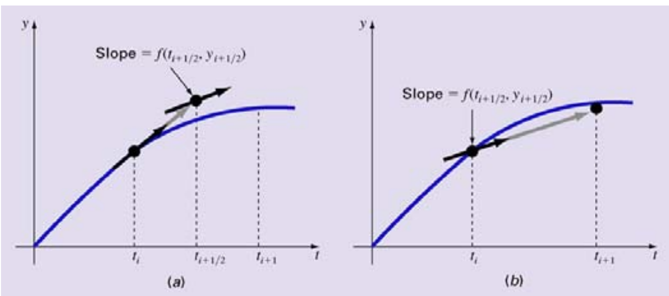
수정자의 수렴에 대한 종료 판정: $|\varepsilon_a| = \left| \dfrac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| \times 100\%$

Ex) P. 592 예제 22.2

중점법 (Midpoint method)

predictor :

corrector :



Runge-Kutta 법

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

고차 도함수를 구하지 않고도 Taylor 급수 방법이 가지는 정확도를 가짐

$y_{i+1} = y_i + \phi h$: n차 Runge-Kutta법 (보통 2차/4차 많이 사용)

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

n = 1, $a_1 = 1$: Euler법

Runge-Kutta 법 (2차)

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

2차 Runge-Kutta 표현

상수 a_1, a_2, p_1 그리고 q_{11}를 결정하기 위하여 2차 Taylor 급수와 같다고 가정

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{f'(t_i, y_i)}{2!}h^2$$

Where $f'(t_i, y_i) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

식 3개, 미지수 4개
➲ 불능

a_2의 배정(가정) 후 나머지 계수 결정 ➲ 2차 RK법은 a_2의 배정에 따라 무한히 많은 종류가 있다

Runge-Kutta 법 (2차)

❑ 반복이 없는 Heun법

- $a_2 = 1/2 \rightarrow a_1 = ½,\ \ p_1 = q_{11} = 1$

Where

⇒ Heun법에서 수정자의 반복이 없는 경우에 해당

❑ 중점법

- $a_2 = 1 \rightarrow a_1 = 0,\ \ p_1 = q_{11} = 1/2$

Where

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

(k_1, k_2 : 구간의 시작/끝에서의 기울기)

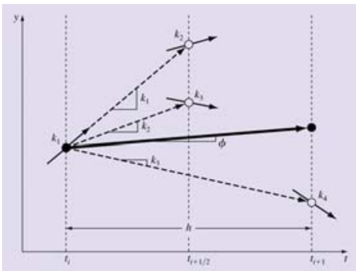
Runge-Kutta 법 (4차)

❑ 전형적인 4차 Runge-Kutta법

Ex) P. 599 예제 22.3

- 가장 보편적으로 사용되는 4차 RK법
- Simpson 1/3 공식과 유사함
- 간격에 대한 평균 기울기를 개선하기 위해 여러 기울기값을 추정 (Heun법과 유사)

Where



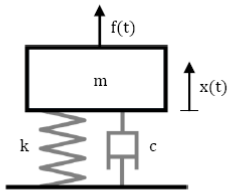
연립 미분방정식의 필요성

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ 고차 미분방정식의 풀이

- 예) 1자유도 진동방정식 : 2차 미분방정식

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad \cdots (1)$$



- 종속변수의 1차 도함수를 새로운 변수로 정의

… (2)

- 식 (2)를 식 (1)에 대입하면

$$m\frac{dv}{dt}+cv+kx=0$$

: 연립 미분방정식

연립 미분방정식의 풀이

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

❑ n차 미분방정식

- n개의 연립 미분방정식으로 변환하여 풀이
- 시작값 t에서 n개의 초기 조건 필요
- 예) 번지점프를 하는 사람의 속도와 위치를 모두 결정해야 하는 경우

$$\frac{dx}{dt}=v \qquad \frac{dv}{dt}=g-\frac{c_d}{m}v^2$$

초기 조건: $x(0)=v(0)=0$

❑ 연립 미분방정식의 수치해법

- 연립 Euler법
- 연립 Runge-Kutta법

Euler법을 사용한 연립 상미분방정식 풀이

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Ex) P. 601 예제 22.4 (번지점프 문제)

$$\frac{dx}{dt}=v \qquad \frac{dv}{dt}=g-\frac{c_d}{m}v^2 \qquad x(0)=v(0)=0, \quad t=10\text{s}, \quad h=2\text{s}$$

Analytic solution: $v(t)=\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$ $\quad x(t)=\frac{m}{c_d}\ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)\right]$

풀이)

t = 0에서의 기울기: $\frac{dx}{dt}=0$ $\quad \frac{dv}{dt}=9.81-\frac{0.25}{68.1}(0)^2=9.81$

Euler법 (t = 2 s)	해석 해	백분율 상대 오차
$x=0+0(2)=0$	$x(2)$ = 19.16629	100%
$v=0+9.81(2)=19.62$	$v(2)$ = 18.72919	4.756%

Euler법 (t = 4 s)

$x=0+19.62(2)=39.24$

$v=19.62+\left(9.81-\frac{0.25}{68.1}(19.62)^2\right)(2) \quad =36.41368$

$$x_{i+1}=x_i+\phi h$$
$$v_{i+1}=v_i+\phi h$$

Euler법을 사용한 연립 상미분방정식 풀이

서울과학기술대학교 SEOULTECH Seoul National University of Science & Technology

Ex) P. 601 예제 22.4 (번지점프 문제)

t	x_{true}	v_{true}	x_{Euler}	v_{Euler}	$\varepsilon_t(x)$	$\varepsilon_t(v)$
0	0	0	0	0		
2	19.1663	18.7292	0	19.6200	100.00	4.76
4	71.9304	33.1118	39.2400	36.4137	45.45	9.97
6	147.9462	42.0762	112.0674	46.2983	24.25	10.03
8	237.5104	46.9575	204.6640	50.1802	13.83	6.86
10	334.1782	49.4214	305.0244	51.3123	8.72	3.83

- 간격 크기가 커서 결과가 정확하지 않음
- 두 번째 반복을 수행하기까지 x_{Euler}는 0으로 계산됨.
- 간격 크기를 줄이면 결과를 개선시킬 수 있음.
- 고차 방법을 사용하면 상대적으로 큰 간격에 대해서도 좋은 결과를 얻을 수 있음

Matlab 내장함수 (적응식 R-K법)

- **Ode23**
  - Bogacki와 Shampine, 1989
  - 2차와 3차 RK법 사용
- **Ode45**
  - Dormand와 Prince, 1990
  - 4차와 5차 RK법 사용
  - 가장 널리 사용
- **Ode113**
  - 변동 차수를 갖는 Adams-Bashforth-Moulton 해법
  - 엄격한 오차 공차나 계산 집약적 상미분방정식을 다루기에 적합

사용예 (ode45)

```
>> [t, y] =
```

tspan 정의방법

```
>>        --- 구간 정의
>>        --- 특정 시간
```


Matlab 내장함수 (적응식 R-K법)

Ex) P. 606 사례연구 22.6 (포식자-피식자 모델)

$$\frac{dy_1}{dt} = 1.2y_1 - 0.6y_1y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -0.8y_2 + 0.3y_1y_2, \quad y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 1$$

Step 1. 상미분방정식 정의를 위한 m-file 작성

```
function yp = predprey(t,y)
  yp = [1.2*y(1) – 0.6*y(1)*y(2); -0.8*y(2) + 0.3*y(1)*y(2)];
```

Step 2. 내장함수 실행 및 그래프 확인

```
>> tspan = [0 20];
>> y0 = [2, 1];
>> [t,y] = ode45(@predprey, tspan, y0);
>> plot(t,y)
>> plot(y(:,1),y(:,2))   %상태공간 그림
```